UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2008-2009
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Examen - Lundi 4 mai 2009.
Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. Soient $(X_i)_{i\geq 0}$ des variables i.i.d. telles que $\mathbb{P}(X_0 = 0) = p$, $\mathbb{P}(X_0 = 1) = 1 - p$ ($p \in]0, 1[$). On fixe $n = 100$. On note $A = \{\exists i \in \mathbb{N} : X_i = X_{i+1} = \cdots = X_{i+n-1} = 0\}$. On note $A' = \{\exists i \in \mathbb{N} : X_{ni} = X_{ni+1} = \cdots = X_{ni+n-1} = 0\}$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(A) \geq \mathbb{P}(A')$.
   (b) Calculer $\mathbb{P}(A')$. Indication : on pourra écrire A' comme une intersection.
   (c) En déduire $\mathbb{P}(A)$.
2. Soient $U_1, U_2, \dots$ i.i.d. de loi uniforme sur $]0, 1[$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(U_1 + \cdots + U_n \geq n^2) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$.
   (b) On fixe $n = 400$. Estimer $\mathbb{P}\left(U_1 + \cdots + U_n \geq \frac{11n}{20}\right)$.
3. Calculer $\lim_{n\to+\infty} \int_0^{+\infty} (\cos(x))^n e^{-x} dx$.
4. Soient U, V deux variables indépendantes de loi $\mathcal{E}(1)$ (loi exponentielle de paramètre 1).
   (a) Quelle est la loi de $\sup(U, V)$ (pour $u, v \in \mathbb{R}$, $\sup(u, v)$ est le plus grand des deux réels u, v) ? Indication : on pourra calculer la fonction de répartition.
   (b) Quelle est la loi de $U + V$? Indication : on pourra calculer la densité de la loi de $U + V$.
5. Soit X de loi $\mathcal{N}(0, 1)$ (loi normale centrée réduite).
   (a) Soit $u \in \mathbb{R}$. Montrer que la variable $\left|\frac{e^{uX}-1}{X}\right|$ est d'espérance finie.
   (b) Soit $M > 0$ quelconque. Montrer que la dérivée de $u \mapsto \mathbb{E}\left(\frac{e^{uX}-1}{X}\right)$ pour $|u| < M$ est $u \mapsto \mathbb{E}(e^{uX}) = \int_{\mathbb{R}} e^{ux} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}$. Indication : on admettra l'existence d'une constante C_M telle que $M|x| - x^2/2 \leq C_M - x^2/4$ ($\forall x \in \mathbb{R}$). On laissera dans un premier temps la dérivée sous forme intégrale.
   (c) Calculer pour aboutir à une expression de la dérivée sans espérance ni intégrale.
   (d) Calculer la dérivée de $u \mapsto \mathbb{E}\left(\frac{e^{uX}-1}{X}\right)$ pour tout u.