UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 1 IMEA, Méthodes de Monte-Carlo, 2008-2009
Sylvain Rubenthaler
http ://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen du vendredi 24 avril 2009

Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

Ex. 1 (a) On prend une fonction $f \in C_b^+(\mathbb{R})$ et on calcule

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X)) &= \mathbb{E}(f(-\log(U))) \\
&= \int_0^1 f(-\log(u))du \\
\text{(changement de variable } x=-\log(u)) &= \int_{+\infty}^0 f(x)(-1)e^{-x}dx \\
&= \int_0^{+\infty} f(x)e^{-x}dx \ .
\end{aligned}$$

Donc X a pour densité $x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(x)e^{-x}$, X est de loi exponentielle de paramètre 1.

(b) Notons $X_1, X_2, \dots$ les variables X générées au cours de l'algorithme. Nous avons $T = \inf\{i : X_i \in [m; m+1]\}$. Notons $p = \mathbb{P}(X_1 \in [m; m+1]) = \int_3^4 e^{-x}dx = e^{-3} - e^{-4}$. Calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}(T=i) \\
&= \sum_{i=1}^{+\infty} i\mathbb{P}(X_1 \notin [m; m+1], \dots, X_{i-1} \notin [m; m+1], X_i \in [m; m+1]) \\
\text{(par indépendance des } X_k) &= \sum_{i=1}^{+\infty} i(1-p)^{i-1}p \\
&= \frac{1}{p} \ .
\end{aligned}$$

(c) Cet algorithme est une méthode de Monte-Carlo qui calcule de manière approchée $\mathbb{E}(X\mathbf{1}_{[m;m+1]}(X)) = \dots$.

(d)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X^2\mathbf{1}_{[m;m+1]}(X)^2) &= \int_m^{m+1} x^2e^{-x}dx \\
&= \dots
\end{aligned}$$

et $\mathbb{E}(X) = \dots$ donc $\mathrm{Var}(\mathbf{1}_{[m;m+1]}(X)) = \dots$.

Ex. 2 Notons $Y_1, Y_2, \dots$ les variables y générées par l'algorithme. Elles sont indépendantes de loi uniforme sur $[m; m+1]$. L'algorithme est une méthode de Monte-Carlo qui calcule de manière approchée $\mathbb{E}(e^{-Y_1})$. Calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(e^{-Y_1}) &= \int_m^{m+1} e^{-y}dy \\
&= e^{-3} - e^{-4} \ .
\end{aligned}$$

Ex. 3 (a) Soit $f \in C_b^+(\mathbb{R})$,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(Z)) &= \mathbb{E}(f(2X)) \\ &= \int_0^{+\infty} f(2x)e^{-x}dx \\ \text{(changement de variable } z=2x) \quad &= \int_0^{+\infty} f(z)e^{-z/2}\frac{1}{2}dz \end{aligned}$$

Donc Z a pour densité $z \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(z)\frac{1}{2}e^{-z/2}$, Z est de loi exponentielle de paramètre $1/2$.

(b) Calculons

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{xe^{-x}}{e^{-x/2}}\right) = \left(1-\frac{x}{2}\right)e^{-x/2} .$$

L'étude du tableau de variation de $x \in \mathbb{R}^+ \mapsto \frac{xe^{-x}}{e^{-x/2}}$ nous montre que cette fonction atteint son maximum en $x_0 = 2$ et elle vaut alors $2/e$. D'où le résultat.

(c) L'algorithme qui attribue une valeur à y est un algorithme d'acceptation/rejet. On a donc y de loi de densité $y \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)ye^{-y}$.

(d) Cet algorithme est un algorithme de Monte-Carlo approchant (on note Y v.a. de densité $y \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{\mathbb{R}^+}(y)ye^{-y}$)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(Y) &= \int_0^{+\infty} y^2e^{-y}dy \\ \text{(intégrations par parties)} \quad &= 2 . \end{aligned}$$

Ex. 4 L'élément x est apériodique donc $\exists n_0$ tel que $\forall n \geq n_0$, $P_{x,x}^n > 0$. Les éléments x et y communiquent donc $\exists k, r$ tels que $P_{x,y}^k \times P_{y,x}^r > 0$. Nous avons $\forall n \geq n_0 + k + r$,

$$\begin{aligned} P_{y,y}^n &\geq P_{y,x}^r P_{x,x}^{n-r-k} P_{x,y}^k \\ &> 0 . \end{aligned}$$

Donc y est apériodique.

Ex. 5 (a) On voit sur un dessin que les classes récurrentes sont $\mathcal{R}_1 = \{1,2\}$, $\mathcal{R}_2 = \{3,4,6\}$ et qu'il y a une classe transiente $\mathcal{T} = \{5\}$.

(b) On résoud $\mu P = \mu$ avec $\mu_3 = \cdots = \mu_6 = 0$ et $\mu_1 + \mu_2 = 1$ et on trouve $\mu = [2/5, 3/5, 0, 0, 0, 0]$.
On résoud $\mu P = \mu$ avec $\mu_1 = \mu_2 = \mu_5 = 0$, $\mu_3 + \mu_4 + \mu_6 = 1$ et on trouve $\mu = [0, 0, 4/21, 9/21, 0, 8/21]$.

(c) Les probabilités invariantes sous P sont donc les combinaisons linéaires

$$\lambda \times [2/5, 3/5, 0, 0, 0, 0] + (1-\lambda) \times [0, 0, 4/21, 9/21, 0, 8/21]$$

avec $\lambda \in [0; 1]$.

(d) Cette chaîne reste dans l'ensemble $\{3, 4, 6\}$ dans lequel elle est récurrente irréductible, de probabilité invariante $[\pi_3, \pi_4, \pi_6] = [4/21, 9/21, 8/21]$. Donc $\mathbb{E}(T) = \mathbb{E}_6(T_6) = 1/\pi_6 = 21/8$.

(e) La chaîne (X_n) est récurrente positive car elle admet une probabilité invariante.

(f) Pour tout $n \geq 3$, $P_{4,4}^n \geq P_{4,3}P_{3,6}P_{6,4}P_{4,4}^{n-3} > 0$. Donc l'état 4 est apériodique. Donc tous les éléments de $\mathcal{R}_2$ sont apériodiques. Donc la chaîne (X_n) est apériodique.

(g) La chaîne (X_n) est irréductible (dans $\mathcal{R}_2$), apériodique, récurrente positive donc $\mathbb{P}(X_n = 3) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \pi_3 = 4/21$.