

Examen - vendredi 24 avril 2009

Durée : 3h.

Documents et calculatrices interdits.

La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.

Les exercices sont indépendants.

Ex. 1

```
s=0 ;
n=10000 ;
m=3 ;
for i=1 :n
    U=rand() ; // (génère U de loi uniforme sur [0;1])
    X=-log(U) ;
    if (X<m+1) then
        if (m<X) then
            s=s+X ;
        end,
    end,
end,
s=s/n ;
s // (affiche s)
```

- (a) Quelle est la loi des variables X générées par ce programme ? (On demande de refaire une démonstration du cours.)
- (b) Soit $T = \inf\{i : s \neq 0\}$ (le premier indice i pour lequel la valeur de s n'est plus 0). Calculer $\mathbb{E}(T)$.
- (c) Quel quantité est approchée par s ?
- (d) Calculer la variance de la méthode.

Ex. 2

```
s=0 ;
n=10000 ;
m=3 ;
for i=1 :n
    y=rand()+m ; // (rand() génère une variable de loi uniforme sur [0;1])
    s=s+exp(-y) ;
end,
s=s/n ;
s // (affiche s)
```

Quelle est la quantité approchée par s ?

Ex. 3

```
n=1000 ;
s=0 ;
C=4/exp(1) ;
for i=1 :n
    b=0 ;
    while (b==0) do    x=grand(1,1,'exp',1) ; // (génère une variable exponentielle
        de paramètre 1)
        z=2*x ;
        u=rand() ; // (rand() génère une variable de loi uniforme sur [0;1])
```

```

if (u<(z*exp(-z)/(C*0.5*exp(-0.5*z)))) then
  y=z ;
  b=1 ;
  end,
end,
s=s+y ;
end,
s=s/n ;
s // (affiche s)

```

- Quelle est la loi des variables z générées par cet algorithme ?
- Montrer que $\forall x \geq 0, xe^{-x} \leq \frac{4}{e} \times \frac{1}{2}e^{-x/2}$.
- Quelle est la loi des variables y générés par cet algorithme ?
- Quelle quantité est approchée par s ? (On demande une valeur numérique.)

Ex. 4 Soit P transition sur E espace au plus dénombrable. Soit x un élément de E apériodique (pour P). Soit y communiquant à x ($x \leftrightarrow y$). Montrer que y est apériodique. (On demande de refaire une démonstration du cours.)

Ex. 5 On se donne la matrice de transition suivante sur $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

$$P = \begin{bmatrix} 1/2 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 & 1/4 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 0 & 0 & 1/3 & 1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/4 & 0 & 3/4 \end{bmatrix}$$

- Quelles sont les classes récurrentes et les classes transitoires de P ?
- Quelles sont les probabilités invariantes des différentes classes de récurrence ?
- Quelles sont les probabilités invariantes sous P ?
- Soit $(X_n)_{n \geq 0}$ chaîne de Markov de transition P et partant de 6. Soit $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 6\}$. Calculer $\mathbb{E}(T)$.
- La chaîne (X_n) est-elle récurrente positive ?
- Montrer que la chaîne (X_n) est apériodique.
- Quelle est la limite de $\mathbb{P}(X_n = 3)$ quand $n \rightarrow \infty$?