UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 IMEA, Ingénierie stochastique, 2008-2009
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen du 7 janvier 2009.

Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. (a)
$$\begin{aligned}\mathbb{P}((Y_{n+1},\epsilon_{n+1})=(y,1)|(Y_n,\epsilon_n)=(x,1)) &= \mathbb{P}(V_{n+1}=y-x, U_{n+1}\leq g(y))\\ &= K(x,y)g(y)\ .\end{aligned}$$

   (b) La quantité $f(Y_n)$ peut toujours être vue comme fonction de (Y_n,ϵ_n). Donc, par la question précédente:
$$\mathbb{E}(f(Y_n)\mathbf{1}_{T>n}) = \sum_{x_1,\dots,x_n\in\mathbb{Z},\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{1\}} K(0,x_1)g(x_1)\dots K(x_{n-1},x_n)g(x_n)\times f(x_n)\ .$$

2. (a) On fait un petit dessin pour se rendre compte que tous les états communiquent, donc la chaîne est irréductible. Comme l'espace d'état est fini, elle est alors récurrente positive.

   (b) Nous avons $P^3_{1,1}\geq P_{1,2}P_{2,4}P_{4,1}>0$ et $P^5_{1,1}\geq P_{1,2}P_{2,3}P_{3,2}P_{2,4}P_{4,1}>0$.

   (c) Par théorème de Bezout, il existe $a,b\in\mathbb{Z}$ tels que $3a+5b=1$, et on peut même en trouver : prenons par exemple $a=-3$, $b=2$. Alors, $\forall n\geq 9$, on peut écrire la division euclidienne de n par 9 : $n=9d+r$ puis $n=3\times 3\times d+r\times(3a+5b)=3u+5v$ avec $u,v\in\mathbb{N}$. Donc $P^n_{1,1}\geq P^{3u}_{1,1}P^{5v}_{1,1}>0$. Donc 1 est apériodique. Donc toute la chaîne est apériodique.

   (d) On cherche à résoudre $\mu P=\mu$ (avec $\mu_1+\mu_2+\mu_3+\mu_4=1$), c'est à dire
$$\begin{cases} & & & (1/2)\mu_4 &=\mu_1\\ (1/2)\mu_1 & & +\mu_3 & &=\mu_2\\ & (1/2)\mu_2 & & +(1/2)\mu_4 &=\mu_3\\ (1/2)\mu_1 & +(1/2)\mu_2 & & &=\mu_4\end{cases}$$
   On résoud et on trouve $\mu_1=2/17$, $\mu_2=6/17$, $\mu_3=5/17$, $\mu_4=4/17$.

   (e) Comme la chaîne est irréductible, récurrente positive et apériodique, alors $\forall x,y$, $P^n_{x,y}\underset{n\to\infty}{\longrightarrow}\mu_y$.

   (f) La chaîne est irréductible positive donc $\mathbb{E}_4(T_4)=1/\mu_4=17/2$.

3. (a) On prend une fonction mesurable $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$. On a $\mathbb{E}(\varphi(Z))=\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbf{1}_{Uf(X)<g(X)}+\varphi(Y)\mathbf{1}_{Uf(X)>g(X)}\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)}|\mathbf{1}_{Uf(X)<g(X)}+\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)}>0)$. Calculons (en utilisant Fubini-

Tonelli)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbf{1}_{Uf(X)<g(X)}+\varphi(Y)\mathbf{1}_{Uf(X)>g(X)}\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)})= \\
&\int_{x,y\mathbb{R}^2}\int_{u,v\in[0,1]^2}(\varphi(x)\mathbf{1}_{uf(x)<g(x)}+\varphi(y)\mathbf{1}_{uf(x)>g(x)}\mathbf{1}_{vg(y)<f(y)})f(x)g(y)dxdy= \\
&\int_{x,y\mathbb{R}^2}\varphi(x)\left(1\wedge\frac{g(x)}{f(x)}\right)f(x)g(y)dxdy \\
&\quad+\int_{x,y\mathbb{R}^2}\varphi(y)\left(1-\left(1\wedge\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right)\left(1\wedge\frac{f(y)}{g(y)}\right)f(x)g(y)dxdy= \\
&\int_{x,y\mathbb{R}^2}\varphi(x)g(y)(f(x)\wedge g(x))dxdy \\
&\quad+\int_{x,y\mathbb{R}^2}\varphi(y)(f(x)-(f(x)\wedge g(x)))(g(y)\wedge f(y))dxdy= \\
&\text{(on échange } x \text{ et } y \text{ dans la dernière intégrale)} \\
&\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)\left[(f(x)\wedge g(x))+(g(x)\wedge f(x))\int_{y\in\mathbb{R}}f(y)-(f(y)\wedge g(y))dy\right]dx= \\
&\int_{x\in\mathbb{R}}\varphi(x)(f(x)\wedge g(x))dx\times\left(2-\int_{y\in\mathbb{R}}(f(y)\wedge g(y))dy\right)
\end{aligned}$$

Et puisque

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbf{1}_{Uf(X)<g(X)}+\varphi(Y)\mathbf{1}_{Uf(X)>g(X)}\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)}|\mathbf{1}_{Uf(X)<g(X)}+\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)}>0)= \\
&\frac{\mathbb{E}(\varphi(X)\mathbf{1}_{Uf(X)<g(X)}+\varphi(Y)\mathbf{1}_{Uf(X)>g(X)}\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)})}{\mathbb{E}(\mathbf{1}_{Uf(X)<g(X)}+\mathbf{1}_{Uf(X)>g(X)}\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)})}\ ,
\end{aligned}$$

(donc la densitée recherchée est proportionelle à $x\mapsto f(x)\wedge g(x)$). En posant $C=\int_{x\in\mathbb{R}}f(x)\wedge g(x)dx$, on a que Z est de densité

$$x\mapsto\frac{1}{C}(f(x)\wedge g(x))\ .$$

(b) À chaque itération, la probabilité de succès (c'est à dire que la boucle s'arrête) est :

$$\begin{aligned}
p &= \mathbb{E}(\mathbf{1}_{Uf(x)<g(X)}+\mathbf{1}_{Uf(X)>g(X)}\mathbf{1}_{Vg(Y)<f(Y)}) \\
&= \int_{x\in\mathbb{R}}\left(1\wedge\frac{g(x)}{f(x)}\right)dx+\int_{x,y\in\mathbb{R}^2}\left(1-\left(1\wedge\frac{g(x)}{f(x)}\right)\right)\left(1\wedge\frac{f(y)}{g(y)}\right)dxdy\ .
\end{aligned}$$

(c) On note T le nombre de boucles effectuées.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(T) &= \sum_{k\geq 1}kp(1-p)^{k-1} \\
&= p\frac{d}{d\alpha}\left(\sum_{k\geq 0}\alpha^k\right)\bigg|_{\alpha=1-p} \\
&= p\frac{1}{(1-(1-p))^2}=\frac{1}{p}\ .
\end{aligned}$$