UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 2 IMEA, Ingénierie stochastique, 2008-2009
Sylvain Rubenthaler
http://math1.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Examen - 7 janvier 2009.

Durée : 3h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. Soit $g : \mathbb{Z} \to]0;1[$. Soit $(U_n)_{n\geq 1}$ suite i.i.d. de loi uniforme sur $[0;1]$. Soit $(Y_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov dans $\mathbb{Z}\cup\{\pi\}$ définie par:
   - $Y_0 = 0$.
   - À Y_n fixé.
     - Si $Y_n = \pi$ alors $Y_{n+1} = \pi$.
     - Si $Y_n \neq \pi$. On tire V_{n+1} uniformément dans $A = \{-1, 1\}$. Puis on pose

$$Y_{n+1} \begin{cases} = Y_n + V_{n+1} & \text{si } U_{n+1} \leq g(Y_n + V_{n+1}) \\ = \pi & \text{si } U_{n+1} > g(Y_n + V_{n+1}) \ . \end{cases}$$

   On pose $\epsilon_0 = 1$ et $\forall n \geq 1$,

$$\epsilon_n \begin{cases} = 0 & \text{si } Y_n = \pi \\ = 1 & \text{si } Y_n \neq \pi \ . \end{cases}$$

   On note $\forall x, y \in \mathbb{Z}$,

$$K(x,y) \begin{cases} = 1/2 & \text{si } y - x \in A \\ = 0 & \text{sinon } \ . \end{cases}$$

   (a) On admet que $(Y_n, \epsilon_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov (dans $(\mathbb{Z}\cup\{\pi\}) \times \{0,1\}$). Pour $x, y \in \mathbb{Z}$, calculer $\mathbb{P}((Y_{n+1}, \epsilon_{n+1}) = (y,1) | (Y_n, \epsilon_n) = (x,1))$.

   (b) On note $T = \inf\{n, Y_n = \pi\}$. On se donne $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mesurable. Montrer que

$$\mathbb{E}(f(Y_n)\mathbf{1}_{T>n}) = \sum_{x_1,\dots,x_n\in\mathbb{Z}} K(0,x_1)g(x_1)K(x_1,x_2)g(x_2)\dots K(x_{n-1},x_n)g(x_n) \times f(x_n) \ .$$

2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ chaîne de Markov dans $\{1,2,3,4\}$ de loi initiale μ_0 quelconque et de matrice de transition

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 0 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

   (a) Montrer que (X_n) est irréductible, récurrente positive.

   (b) Montrer que $P^3_{1,1} > 0$, $P^5_{1,1} > 0$.

   (c) En déduire que la chaîne est apériodique.

   (d) Calculer μ la proba invariante de cette chaîne.

   (e) Montrer que $\forall x, y$, $P^n_{x,y}$ a une limite quand $n \to +\infty$ et calculer cette limite.

   (f) Soit $T_4 = \inf\{n : X_n = 4\}$. Calculer $\mathbb{E}_4(T_4)$.

3.

```
function s=f(x)
  s=exp(-x*x/2)/sqrt(2*%pi);
endfunction
function s=g(x)
  s=exp(-(x-2)*(x-2)/2)/sqrt(2*%pi);
endfunction
b=0;
while (b==0)
  U=rand(); // cette ligne renvoie U de loi uniforme sur [0,1]
  V=rand();
  X=grand(1,1,'nor',0,1); // cette ligne renvoie X de loi normale de moyenne
   0 et de variance 1
  Y=grand(1,1,'nor',t,1); // cette ligne renvoie Y de loi normale de moyenne
   t et de variance 1
  if (U*f(X)<g(X))
    Z=X;
    b=1;
  elseif (V*g(Y)<f(Y))
    Z=Y;
    b=1;
  end,
end,
Z // cette ligne affiche Z
```

(a) Quelle est la loi de la variable Z renvoyée parle programme scilab ci-dessus ? (Cette question est plus difficile que les suivantes. Vous pouvez la sauter et faire quand même (b) et (c).)

(b) Calculer la probabilité p que la boucle s'arrête à l'itération 1 à l'aide des fonctions f et g.

(c) Exprimer le nombre moyen de boucles effectuées par ce programme à l'aide de p. (On demande de faire un calcul.)