UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 1 IMEA, Méthodes de Monte-Carlo, 2008-2009
Sylvain Rubenthaler
http ://math1.unice.fr/~rubentha/cours.html

Feuille d'exercice

```
n=10 ;
X=zeros(1,n) ;
U=rand() ; \\ (génère une variable aléatoire uniforme sur [0,1])
X(1)=U ;
for k=2 :n
  b=0 ;
  while (b==0)
    Y=X(k-1)+grand(1,1,'nor',0,1) ; \\ (grand(...) génère une variable aléatoire
    de loi N(0,1))
    if (Y>0) then
      if (Y<1) then
        b=1 ;
      end,
    end,
  end,
  X(1,k)=Y ;
end,
X
```

L'algorithme ci-dessus génère $X(1,1),\dots,X(1,n)$ qui est une réalisation d'une chaîne de Markov $(X_k)_{k\geq 1}$ avec $X_1 \sim \mathcal{U}([0,1])$. On veut calculer le noyau de transition de cette chaîne de Markov (attention, cette chaîne n'est pas à valeurs discrètes, on veut calculer la densité de la loi $\mathcal{L}(X_k|X_{k-1})$). On prend $k\geq 2$, on suppose X_{k-1} connu et on s'intéresse à la simulation de X_k. Notons $Y_1, Y_2, \dots$ les variables gaussiennes simulées dans la boucle « `while` »nécessaire à la simulation de X_k.

1. Écrire $p = \mathbb{P}(Y_1 \in [0,1]|X_{k-1})$ sous forme d'intégrale.
2. Soit $T = \inf\{j : Y_j \in [0;1]\}$. Calculer $\mathbb{E}(T)$ à l'aide de p.
3. Calculer la densité de $\mathcal{L}(X_k|X_{k-1})$.