UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2008-2009
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/$\sim$rubentha/cours.html

Corrigé du partiel du mercredi 11 mars 2009.

Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. ...
2. (a)

$$\begin{aligned}\mu([0,1]) &= \int_0^1 f(x)dx \\ &= \int_0^1 x^2 e^{-x^3}dx \\ &= \left[\frac{-1}{3}e^{-x^3}\right]_0^1 \\ &= \frac{1}{3}(1-e^{-1}) \ .\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int_0^1 x^2\mu(dx) &= \int_0^1 x^2\sin(x)dx \\ &= [x^2(-\cos(x))]_0^1 + \int_0^1 2x\cos(x)dx \\ &= -\cos(1) + [2x\sin(x)]_0^1 - \int_0^1 2\sin(x)dx \\ &= -\cos(1) + 2\sin(1) - [2(-\cos(x))]_0^1 \\ &= -\cos(1)+2\sin(1)+2\cos(1)-2 = 2\sin(1)+\cos(1)-2 \ .\end{aligned}$$

3. (a)
   - Pour tout $x \in [1,\pi/2]$ et tout $n \geq 1$, $\left|\frac{\log(1+x/n)}{\sin(x/n)}\right| \leq \frac{|x/n|}{|(2/\pi)(x/n)|} = \frac{\pi}{2}$ (fonction constante qui est intégrable sur $[1,\pi/2]$).
   - Pour tout $x \in [1,\pi/2]$, $\frac{\log(1+x/n)}{\sin(x/n)} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{(x/n)}{(x/n)} = 1$, donc $\frac{\log(1+x/n)}{\sin(x/n)} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1$.
   - Par théorème de convergence dominée, nous avons donc $\int_1^{\pi/2}\frac{\log(1+x/n)}{\sin(x/n)}dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_1^{\pi/2} 1dx = (\pi/2-1)$.

   (b)
   - On utilise : $\forall u \in [0,\pi/2]$, $\cos(u) \leq 1-u^2/2$. Pour tout $x \in [0,\pi/4]$ et tout $n \geq 1$, $\left|\frac{1}{1-\cos(x/n)}\log\left(1+\frac{x^3}{n^2}\right)\right| \leq \frac{1}{x^2/(2n^2)}\frac{x^3}{n^2} = x$, et cette fonction est intégrable sur $[0,\pi/4]$.
   - Pour tout $x \in]0,\pi/4]$, $1-\cos(x/n) = 1-(1+x^2/n^2+o(1/n^2)) = x^2/n^2 + o(1/n^2) \underset{n\to+\infty}{\sim} x^2/n^2$. Donc pour tout $x \in]0,\pi/4]$, $\left(\frac{1}{1-\cos(x/n)}\right)\log\left(1+\frac{x^3}{n^2}\right) \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{n^2}{x^2}\frac{x^3}{n^2} = x$. Donc, pour p.t. $x \in [0,\pi/4]$, $\left(\frac{1}{1-\cos(x/n)}\right)\log\left(1+\frac{x^3}{n^2}\right) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$.
   - Par théorème de convergence dominée, $\int_0^{\pi/4}\left(\frac{1}{1-\cos(x/n)}\right)\log\left(1+\frac{x^3}{n^2}\right)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{\pi/4} xdx = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}\right)^2$