UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Intégration et Probabilités - 2008-2009
Sylvain Rubenthaler, http://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen de rattrapage du lundi 8 juin 2009.

Durée : 2h.
Documents et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Les exercices sont indépendants.

1. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_1) &= \int_0^{+\infty} xe^{-x}dx \\
&= [-xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-x}dx \\
&= 0 + [-e^{-x}]_0^{+\infty} \\
&= 1 \ .
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(U_1^2) &= \int_0^{+\infty} x^2e^{-x}dx \\
&= [-x^2e^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2xe^{-x}dx \\
&= [-2xe^{-x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} 2e^{-x}dx \\
&= 2 \ .
\end{aligned}$$

Donc $\mathrm{Var}(U_1) = 1$.

(b) Les variables $U_1, U_2, \dots$ sont L^2, on peut donc appliquer le théorème central-limite.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(U_1 + \dots + U_n \geq n(1+\alpha)) &= \mathbb{P}\left(\frac{U_1 - 1 + \dots + U_n - 1}{\sqrt{n}} \geq \sqrt{n}\alpha\right) \\
\text{(TCL)} \quad &\approx \mathbb{P}(Z \geq 1) \\
&\quad \text{avec } Z \sim \mathcal{N}(0,1).
\end{aligned}$$

Et on lit sur la table que cette dernière valeur vaut (à peu près) $1 - 0.8413 = 0,1587$.

2.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $(\cos(x))^n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$ si $x \notin \{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$. La mesure de Lebesgue de $\{k\pi, k \in \mathbb{Z}\}$ est nulle. En utilisant la continuité de exp, on peut donc dire que $\exp(-x + (\cos(x))^n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \exp(-x)$.
- Pour tout $x \in \mathbb{R}^+$, $\exp(-x + (\cos(x))^n) \leq \exp(-x+1)$. Et la fonction $x \mapsto \exp(-x+1)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^+$.
- Donc par convergence dominée, $\int_0^{+\infty} \exp(-x + (\cos(x))^n)dx \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_0^{+\infty} e^{-x}dx = 1$.

3. (a) Si $t \leq 0$, $\mathbb{P}(\inf(U,V) \geq t) = 1$. Si $t \geq 1$, $\mathbb{P}(\inf(U,V) \geq t) = 0$. Si $0 \leq t \leq 1$:

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\inf(U,V) \geq t) &= \mathbb{P}(U \geq t, V \geq t) \\
\text{(indépendance)} \quad &= \mathbb{P}(U \geq t)\mathbb{P}(V \geq t) \\
&= (1-t)^2 \ .
\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{P}(\inf(U,V)\leq t)\begin{cases}=0 & \text{si } t\leq 0\\ =1-(1-t)^2 & \text{si } t\in[0;1]\\ =1 & \text{si } t\geq 0\ .\end{cases}$$

4. (a) Soit $\phi\in C_b^+(\mathbb{R}^2)$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\phi(X,Y)) &= \mathbb{E}(\phi(UV,V))\\ &= \int_{\mathbb{R}^2}\phi(uv,v)\frac{e^{-u^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{v\geq 0}e^{-v}dudv\ .\end{aligned}$$

Changement de variable $x=uv, y=v$, $u=x/y, v=y$. Quand (x,y) parcourt $\mathbb{R}^2$, (u,v) parcourt $\mathbb{R}^2$ (et on oublie la droite $\{y=\}$, de mesure nulle). Matrice jacobienne :

$$\begin{bmatrix}\frac{1}{y} & 0\\ -\frac{x}{y^2} & 1\end{bmatrix}$$

de déterminant $1/y$. Nous avons donc

$$\mathbb{E}(\phi(X,Y)) = \int_{\mathbb{R}^2}\phi(x,y)\frac{e^{-x^2/2y^2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-y}\left|\frac{1}{y}\right|dxdy\ .$$

Donc la densité de (X,Y) est la fonction $(x,y)\in\mathbb{R}^2\mapsto\frac{e^{-x^2/2y^2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-y}\left|\frac{1}{y}\right|$.

(b) Soit $\psi\in C_b^+(\mathbb{R})$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\psi(X)) &= \int_{\mathbb{R}^2}\psi(x)\frac{e^{-x^2/2y^2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-y}\left|\frac{1}{y}\right|dxdy\\ \text{(Fubini-Tonelli)} &= \int_{\mathbb{R}}\psi(x)\left(\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-x^2/2y^2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-y}\left|\frac{1}{y}\right|dy\right)dx\ .\end{aligned}$$

Donc a densité de X est $x\in\mathbb{R}\mapsto\int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-x^2/2y^2}}{\sqrt{2\pi}}\mathbf{1}_{y\geq 0}e^{-y}\left|\frac{1}{y}\right|dy$.