Feuille de TD n°1

Exo 1

1°/ n-échantillon $(X_1, \dots, X_n)$: $X_1, \dots, X_n$ sont n variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées

estimateur : un estimateur d'un paramètre θ est une application T telle que :

$$(X_1, \dots, X_n) \xrightarrow{T} T(X_1, \dots, X_n)$$

La valeur de T en l'échantillon donné $(x_1, \dots, x_n)$ est l'estimation du paramètre θ.

2°) $X_1 \sim \mathcal{B}(p)$

donc $X_1(\Omega) = \{0 ; 1\}$ avec $P(X_1 = 0) = 1-p$ et $P(X_1 = 1) = p$

on a $E[X_1] = p$ et $V[X_1] = p(1-p)$

Rappel : pour calculer cela on a :

$$E[X_1] = \sum_{k \in X_1(\Omega)} k \times P(X_1 = k) = 0 \times P(X_1 = 0) + 1 \times P(X_1 = 1)$$
$$= p$$

$$V[X_1] = E[X_1^2] - (E[X_1])^2$$

avec $E[X_1^2] = \sum_{k \in X_1(\Omega)} k^2 P(X_1 = k) = p$

$$\Rightarrow V[X_1] = p - p^2$$
$$= p(1-p)$$

3°) Puisque $E[X] = p$, la méthode des moments nous dit qu'un estimateur de p est $\overline{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$

d'où $Var(\hat{p}) = \frac{1}{n^2} \sum p(1-p)$

$= \frac{p(1-p)}{n}$

Exo 2

1°) On a $X_1 \sim \mathcal{P}(\lambda)$ donc $E[X_1] = \lambda$ et $V[X_1] = \lambda$

2°) Puisque $E[X] = \lambda$, un premier estimateur de λ par la méthode des moments est : $\hat{\lambda}_1 = \frac{\sum T_i}{n}$

Puisque $V[X] = \lambda$, un second estimateur de λ par la méthode des moments est $\hat{\lambda}_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (T_i - \bar{T}_n)^2$

3°) On a $L(t_1, \dots, t_n ; \lambda) = \prod e^{-\lambda} \frac{\lambda^{t_i}}{t_i!}$

$= e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum t_i}}{\prod_i t_i!}$

4°) On calcule $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(t_1, \dots, t_n ; \lambda)$

$\frac{\partial L}{\partial \lambda}(t_1, \dots, t_n ; \lambda) = \frac{1}{\prod_i t_i!} \left(-n e^{-\lambda n} \lambda^{\sum t_i} + e^{-\lambda n} \sum t_i \lambda^{\sum t_i -}\right.$

on résout $\frac{\partial L}{\partial \lambda}(t_1, \dots, t_n ; \lambda) = 0$

$\Leftrightarrow e^{-\lambda n} \lambda^{\sum t_i - 1} \left(-\lambda n + \sum t_i\right) = 0$

$\Leftrightarrow \lambda = \frac{\sum t_i}{n}$ car $e^{-\lambda n} > 0$ et $\lambda > 0$

On vérifie que $\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}\left(t_1, \dots, t_n ; \frac{\sum t_i}{n}\right) < 0$

On a $\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}(t_1, \dots, t_n ; \lambda) = \frac{1}{\prod_i t_i!} \Big(-n e^{-\lambda n} \lambda^{\sum t_i - 1}(-\lambda n + \sum t_i)$ (5)

$+ (\sum t_i - 1) e^{-\lambda n} \lambda^{\sum t_i - 2} (-\lambda n + \sum t_i$

$- n e^{-\lambda n} \lambda^{\sum t_i - 1}\Big)$

d'où $\frac{\partial^2 L}{\partial \lambda^2}\left(t_1, \dots, t_n ; \frac{\sum t_i}{n}\right) = \frac{-n e^{-\lambda n} \lambda^{\sum t_i - 1}}{\prod t_i!}$

avec $\lambda = \frac{\sum t_i}{n}$

or $e^{-\lambda n} > 0$

$n > 0$

$\prod t_i! > 0$

$\lambda^{\sum t_i - 1} \geq 0$

donc ok !

d'où, $\hat{\lambda}_3 = \frac{\sum T_i}{n}$

Exo 3

1°) Puisque $m = E[Y_1]$

un estimateur de m par la méthode des moments est :

$\hat{m}_1 = \bar{Y}_n = \frac{1}{n} \sum Y_i$

$b_n(\hat{m}_1) = E[\hat{m}_1] - m$

$= E[\bar{Y}_n] - m = 0$

$\Rightarrow \hat{m}_1$ est sans biais

2°) Puisque $\sigma^2 = V[Y_1]$

un estimateur de σ^2 par la méthode des moments est :

$\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \bar{Y}_n)^2$

soit $S := \begin{cases} m = \dfrac{\sum y_i}{n} \\ \sigma^2 = \dfrac{1}{n}\sum\left(y_i - \dfrac{\sum y_i}{n}\right)^2 \end{cases}$ ④

Maintenant, vérifions que ce point est un maximum

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2}(y_1,\dots,y_n;\theta) = -\frac{2n}{2\sigma^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial(\sigma^2)^2}(y_1,\dots,y_n;\theta) = \frac{-1}{2\sigma^4}\left(-n + \frac{1}{\sigma^2}\sum(y_i-m)^2\right) + \frac{1}{2\sigma^2}\left(-\frac{1}{\sigma^4}\sum(y_i-m)^2\right)$$

$$= \frac{-1}{2\sigma^4}\left(-n + \frac{2}{\sigma^2}\sum(y_i-m)^2\right)$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m\,\partial\sigma^2}(y_1,\dots,y_n;\theta) = -\frac{1}{\sigma^4}\sum_{i=1}^{n}(y_i-m)$$

d'où
$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m^2}(y_1,\dots,y_n;\theta_1) = \frac{-1}{\frac{1}{n}\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2} = \frac{-n}{\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2}$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial m\,\partial\sigma^2}(y_1,\dots,y_n;\theta_1) = \frac{-1}{\frac{1}{n^2}\left(\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2\right)^2}\sum_{i=1}^{n}\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial\sigma^2}(y_1,\dots,y_n;\theta_1) = \frac{-1}{\frac{2}{n^2}\left(\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2\right)^2}\left(-n + \frac{2\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2}{\frac{1}{n}\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2}\right)$$

$$= \frac{-1}{\frac{2}{n^2}\left[\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2\right]^2}(-n+2n)$$

$$= \frac{-n^3}{2\left[\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2\right]^2}$$

ainsi, la matrice Hessienne est ⑤

$$\text{Hess} = \begin{pmatrix} -\dfrac{n}{\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2} & 0 \\ 0 & \dfrac{-n^3}{2\left(\sum\left(y_i-\frac{\sum y_i}{n}\right)^2\right)^2} \end{pmatrix}$$

donc Hess est bien une matrice définie négative

ainsi on a :

$$\hat{m} = \frac{\sum Y_i}{n} \quad \text{et} \quad \hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(Y_i - \frac{\sum Y_i}{n}\right)^2$$

4°) Si on suppose σ^2 connue, cette fois-ci, on doit simplement résoudre $\frac{\partial \ln L}{\partial m}(y_1,\dots,y_n;m)=0$ et vérifier qu'il s'agit d'un maximum.

et donc, on obtient : $\hat{m}_1 = \frac{\sum Y_i}{n}$ qui est bien un maximum!

donc même réponse

5°) Si m est connue, la résolution de $\frac{\partial \ln L}{\partial\sigma^2}(y_1,\dots,y_n,\sigma^2)=0$ conduit à $\hat{\sigma}_1^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-m)^2$ qui est bien un maximum

donc on n'obtient pas le même résultat!

a $F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$

1° cas : si $t \leq \Theta$

$\Rightarrow F_{X_1}(t) = \int_{-\infty}^{t} 0\,dx = 0$

2° cas : si $t > \Theta$

$\Rightarrow F_{X_1}(t) = \int_{\Theta}^{t} e^{-(x-\Theta)}\,dx$

$= \left[-e^{-(x-\Theta)} \right]_{\Theta}^{t}$

$= 1 - e^{-(t-\Theta)}$

d'où : $F_{\hat{\Theta}_3}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq \Theta \\ 1 - e^{-n(t-\Theta)} & \text{si } t > \Theta \end{cases}$

d'où $f_{\hat{\Theta}_3}(t) = \begin{cases} n e^{-n(t-\Theta)} & \text{si } t > \Theta \\ 0 & \text{si } t \leq \Theta \end{cases}$

d'où $E[\hat{\Theta}_3] = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_{\hat{\Theta}_3}(t)\,dt$

$= \int_{\Theta}^{+\infty} n t e^{-n(t-\Theta)}\,dt$

$= n \left(\left[-\frac{1}{n} t e^{-n(t-\Theta)} \right]_{\Theta}^{+\infty} + \frac{1}{n} \int_{\Theta}^{\infty} e^{-n(t-\Theta)}\,dt \right.$

d'où $E[\hat{\Theta}_3] = \Theta + \int_{\Theta}^{+\infty} e^{-n(t-\Theta)}\,dt$

$= \Theta + \left[-\frac{1}{n} e^{-n(t-\Theta)} \right]_{\Theta}^{+\infty}$

$= \Theta + \frac{1}{n}$

donc $\hat{\Theta}_3$ n'est pas un estimateur sans biais !