UNIVERSITÉ DE NICE-SOPHIA ANTIPOLIS
L3 MASS - Statistiques - 2008-2009

TD3 - Corrigé

Ex. 1. 1. On calcule le déterminant de A

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 2 & 5 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{vmatrix} &= \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 3 \\ -1 & 3 & 7 \end{vmatrix} \\ &= 2 \times (21 - 18) = 36 \neq 0 \ . \end{aligned}$$

Donc A est inversible donc X admet une densité dans $\mathbb{R}^3$.

2. Les variables X_1 et $X_1 - aX_2$ sont des gaussiennes ($\forall a$) donc pour qu'elles soient indépendantes, il suffit que $\mathrm{Cov}(X_1, X_1 - aX_2) = 0$. Or $\mathrm{Cov}(X_1, X_1 - aX_2) = \mathrm{Cov}(X_1, X_2) - a\mathrm{Var}(X_1) = 2 - 2a$. Donc il suffit de prendre $a = 0$ (donc $Y = X_1 - X_2$).
Par la définition des vecteurs gaussiens, (X_1, Y) est gaussien, de moyenne $(0, 0)$ et de matrice de covariance

$$\begin{bmatrix} \mathrm{Var}(X_1) & 0 \\ 0 & \mathrm{Var}(Y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \ .$$

Ex. 2. 1. Prenons U vecteur colonne quelconque. Nous avons $U^tY = U^tA^t(X - m) = (U^tA^t)X - (U^tA^t)m$. Le produit U^tA^t est un vecteur ligne donc par la définition des vecteurs gaussiens, Y est un vecteur gaussien.

2. $\mathbb{E}(A^t(X - m)) = A^tm - A^tm = 0$

3.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(YY^t) &= \mathbb{E}(A^t(X - m)(X_m)^tA) \\ &= A^t\mathbb{E}((X - m)(X - m)^t)A \\ &= A^tCA = A^tADA^tA = D \ . \end{aligned}$$

Rappel : Si les vecteurs sont de dimension n, la j-ème ligne de $\mathbb{E}(AX)$ est $\mathbb{E}(\sum_{i=1}^n A_{i,j}X_i) = \sum_{i=1}^n A_{i,j}\mathbb{E}(X_i)$, qui est bien la j-ème ligne de $A\mathbb{E}(X)$.

4. (a) Les Y_k sont gaussiens centrés et $\mathrm{Var}(Y_k) = D_{k,k}$ par la question précédente. D'après le cours, la densité de Y est donc

$$(y_1, \dots, y_n) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi D_{1,1} \dots D_{n,n}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{y_1^2}{D_{1,1}} + \dots + \frac{y_n^2}{D_{n,n}}\right)\right) \ .$$

(b) La matrice C a pour inverse $AD^{-1}A^t$ donc X a pour densité

$$(x_1, \dots, x_n) \mapsto \frac{1}{\sqrt{\det(2\pi A^tDA)}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((x_1, \dots, x_n)AD^{-1}A^t \begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ x_n \end{pmatrix}\right)\right) \ .$$

5. 1. Notons $B = C^{-1}$. En identifiant le terme dans l'exponentiel dans la densité, nous obtenons la relation ($\forall x_1, x_2, x_3$)

$$\begin{aligned} P(x) &= -\frac{1}{2}[B_{1,1}(x_1 - m_1)^2 + B_{2,2}(x_2 - m_2)^2 + B_{3,3}(x_3 - m_3)^2] \\ &\quad -B_{1,2}(x_1 - m_1)(x_2 - m_2) - B_{1,3}(x_1 - m_1)(x_3 - m_3) \\ &\quad -B_{2,3}(x_2 - m_2)(x_3 - m_3) \ . \end{aligned} \tag{1}$$

D'où $B_{1,1} = 1/3$, $B_{2,2} = 14/15$, $B_{3,3} = 3/5$, $B_{1,2} = 1/3$, $B_{1,3} = 0$, $B_{2,3} = -2/5$ (en identifiant les termes « carrés »et « doubles produits »). En identifiant les termes d'ordre 1 (en x_1, x_2, x_3) on obtient le système

$$\begin{cases} \frac{1}{3}m_1 & +\frac{1}{3}m_2 & & = \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}m_1 & +\frac{14}{15}m_2 & -\frac{2}{5}m_3 & = \frac{2}{15} \\ & -\frac{2}{5}m_2 & +\frac{3}{5}m_3 & = \frac{4}{5} \;. \end{cases}$$

D'où l'on tire $m_1 = 0$, $m_2 = 1$, $m_3 = 2$. On peut vérifier que le terme constant dans (1) est bien $-13/15$.

6. Pour calculer C, on peut par exemple inverser le système

$$B\left(\ uvw\ \right) = \left(\ xyz\ \right)$$

(on cherche à exprimer x, y, z en fonction de u, v, w). On trouve

$$C = \begin{bmatrix} 6 & -3 & -2 \\ -3 & 3 & 2 \\ -2 & 2 & 3 \end{bmatrix} .$$

7. Par la définition des vecteurs gaussiens, Y est un vecteur gaussien, de moyenne

$$\begin{pmatrix} -3\times 1 \\ 2\times 1+2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} .$$

Calculons les covariances et les variances de diverses manières

$$\mathrm{Var}((X_1 - 3X_2)^2) = \mathrm{Var}(X_1) + 9\mathrm{Var}(X_2) - 2\times 3\mathrm{Cov}(X_1, X_2) = 6 + 9\times 3 + 6\times 3 = 51 \;,$$

$$\mathrm{Var}(4X_1 + 2X_2 + X_3) = (4, 2, 1)C \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 55 \;.$$

On trouve $\mathrm{Cov}(X_1 - 3X_2, 4X_1 + 2X_2 + X_3) = 28$.

Ex. 3. 1. Pour tout vecteur (u_1, u_2),

$$(u_1, u_2)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} = (u_1, u_2, 0, 0, 0, 0)\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} .$$

Puisque $(X_1, X_2, Y_1, Y_2, Z_1, Z_2)$ est gaussien alors (X_1, X_2) est gaussien. De même (Y_1, Y_2) et (Z_1, Z_2) sont gaussiens. Ces vecteurs sont indépendants car leur densité

$$(x_1, x_2, y_1, y_2, z_1, z_2) \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\det(\Sigma)^3}} \exp\left(-\frac{1}{2}(x_1, \dots, z_2)\begin{bmatrix} \Sigma & 0 & 0 \\ 0 & \Sigma & 0 \\ 0 & 0 & \Sigma \end{bmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \dots \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

est produit d'une fonction de (x_1, x_2), une fonction de (y_1, y_2) et une fonction de (z_1, z_2)

2. Par la définition des vecteurs gaussiens, c'est une variable gaussienne réelle de moyenne $\frac{1}{3}(m_1 - m_2 + m_1 - m_2 + m_1 - m_2) = m_1 - m_2$ et de variance (puisque $(X_1 - X_2) \perp\!\!\!\perp (Y_1 - Y_2)$, ...)

$$\frac{1}{9}(\mathrm{Var}(X_1 - X_2) + \mathrm{Var}(Y_1 - Y_2) + \mathrm{Var}(Z_1 - Z_2)) = \frac{1}{3} \;.$$

3. Par la définition des vecteurs gaussiens, ces trois vecteurs sont gaussiens (cf. question 1.). Ils ne sont pas indépendants (par exemple les deux premiers ne sont pas indépendants car X_1 et X_2 ne sont pas indépendants car $\mathrm{Cov}(X_1, X_2) \neq 0$).
4. Par la définition des vecteurs gaussiens, ce vecteur est gaussien. Moyenne : $(m_1, m_1, m_1, m_2, m_2, m_2)$. Covariance :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1/2 \\ 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$