Or le quantile associée à une loi de Fisher de paramètres 3 et 18, pour 95% est $f = 3,160$

Puisque $F > f$ on rejette l'hypothèse H_0

autrement dit, il existe $i \in \{1,2,3\}$ tq $\beta_i \neq 0$!

4°) Le tableau de variance devient alors:

Source de Variation	Somme des Carrés	ddl
Régression due à X_1	981,326	1
Résiduelle	761,955	20
Total	1743,281	21

car Total = Résiduelle + Régression due à X_1 (Pour la somme des carrés)

5°) Dans chacune des trois situations, on compare deux modèles emboîtés donc la statistique de test aura toujours pour expression:

$$F_{obs} = \frac{\text{Sum Carrés expliqués} / ddl}{\text{Sum Carrés résiduels} / ddl}$$

$\Rightarrow$ a) $F = \dfrac{981,326/1}{761,955/20} = 25,758$

or le fractile associé est 4,350

$\Rightarrow$ rejet de l'hypothèse $\beta_1 = 0$.

b) $F = \dfrac{190,232/1}{571,723/19} = 6,332$

or le fractile associé est 4,380

$\Rightarrow$ rejet de l'hypothèse $\beta_2 = 0$

c) $F = \dfrac{129,431/1}{442,292/18} = 5,267$

a le fractile associé est $4,410$

$\Rightarrow$ rejet de l'hypothèse $\beta_3 = 0$!

Exo 2

1°) Puisque $X = \left(1 \middle| x_1 \middle| x_2 \right)$, on a ${}^tX = \begin{pmatrix} 1 \\ \hline x_1 \\ \hline x_2 \end{pmatrix}$

donc ${}^tXX = \begin{pmatrix} n & \Sigma x_{i1} & \Sigma x_{i2} \\ \cdot & \Sigma x_{i1}^2 & \Sigma x_{i1}x_{i2} \\ & \cdot & \Sigma x_{i2}^2 \end{pmatrix}$ et ${}^tXX$ est symétrique

d'où ${}^tXX = \begin{pmatrix} 8 & 13.44 & 3,99 \\ 13,44 & 22,98 & 6,66 \\ 3,99 & 6,66 & 2,07 \end{pmatrix}$

2°) le modèle s'écrit :

$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_{i1} + \beta_2 x_{i2} + \varepsilon$

on pose $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

on sait que $\hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1}\,{}^tXY$

on sait que ${}^tXY = \begin{pmatrix} -23,4 \\ -38,05 \\ -12,93 \end{pmatrix}$

Il nous faut déterminer $({}^tXX)^{-1}$

Soit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix}$ tq $({}^tXX)\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix}$

Si on exprime $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} t \\ u \\ v \end{pmatrix}$, alors on connaîtra $({}^tXX)^{-1}$

a

$$\begin{cases} t = 8x + 13.44y + 3.99z \\ u = 13.44x + 22.98y + 6{,}66z \\ v = 3{,}99x + 6.66y + 2.07z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}\left(t - 13.44y - 3.99z\right) \\ u = \frac{13.44}{8}t - \frac{13.44^2}{8}y - \frac{13.44 \times 3.99}{8}z + 22.98y + 6.66z \\ v = \frac{3.99}{8}t - \frac{3.99 \times 13.44}{8}y - \frac{3.99^2}{8}z + 6.66y + 2.07z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}\left(t - 13.44y - 3.99z\right) \\ u = \frac{13.44}{8}t + \frac{3.2064}{8}y - \frac{0.3456}{8}z \\ v = \frac{3.99}{8}t - \frac{0.3456}{8}y + \frac{0{,}6399}{8}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{1}{8}\left(t - 13.44y - 3.99z\right) \\ y = \frac{8}{3.2064}\left(u - \frac{13.44}{8}t + \frac{0.3456}{8}z\right) \\ v = \frac{3.99t}{8} - \frac{0.3456}{3.2064}\left(u - \frac{13.44}{8}t + \frac{0.3456}{8}z\right) + \frac{0.6399}{8}z \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = \frac{17.4384}{8 \times 3.2064}t - \frac{0.3456}{3.2064}u + \frac{1{,}932336}{8 \times 3.2064}z \\ y = \frac{8}{3.2064}\left(u - \frac{13.44}{8}t + \frac{0{,}3456}{8}z\right) \\ x = \frac{1}{8}\left(t - 13.44y - 3.99z\right) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = \frac{8 \times 3.2064}{1{,}932336}\left(v - \frac{17.4384}{8 \times 3{,}2064}t + \frac{0.3456}{3.2064}u\right) \\ \quad = 13.27471\, v - 9{,}024517\, t + 1.430807\, u \\ y = 1.430807\, v - 5{,}164319\, t + 2{,}649229\, u \\ x = -9.024517\, v + 13.302034\, t - 5.164319\, u \end{cases}$$

d'où $({}^t X X)^{-1} = \begin{pmatrix} 13.302034 & -5.164319 & -9.024517 \\ -5.164319 & 2.649229 & 1.430807 \\ -9.024517 & 1.430807 & 13.27471 \end{pmatrix}$

donc $\hat{\beta} = \begin{pmatrix} 1.921753 \\ 1.541583 \\ -14.9105 \end{pmatrix}$ il suffit en effet de réaliser le produit matriciel $({}^t X X)^{-1} \times {}^t X Y$.

Exo 3 :

1°) W est une matrice symétrique définie positive.

Donc il existe une matrice P et une matrice D diagonale telle que

$$W = P D {}^t P$$

avec $D = \begin{pmatrix} \lambda_1^2 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d^2 \end{pmatrix}$ et ${}^t P = P^{-1}$

$$\Rightarrow W = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} {}^t P \cdot P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} {}^t P$$

$$\Rightarrow W^{1/2} = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \lambda_d \end{pmatrix} {}^t P$$

2°) Soit $\tilde{Y} = W^{1/2} Y$

comme $Y = X\beta + \varepsilon$ avec $Var(\varepsilon) = \sigma^2 W^{-1}$

$\tilde{Y} = W^{1/2} X \beta + W^{1/2} \varepsilon$

Posons $T = W^{1/2} X$ et $u = W^{1/2} \varepsilon$

alors $\tilde{Y} = T\beta + u$ avec $Var(u) = Var(W^{1/2}\varepsilon)$

$= W^{1/2} \, Var(\varepsilon) \, W^{1/2}$

car ${}^t(W^{1/2}) = W^{1/2}$

$= \sigma^2 W^{1/2} W^{-1} W^{1/2}$

$= \sigma^2 I$

$\Rightarrow \tilde{Y}$ est un modèle linéaire multiple

3°) On a alors $\hat{\beta} = ({}^t T T)^{-1} \, {}^t T \tilde{Y}$

$$= ({}^t X W^{1/2} W^{1/2} X)^{-1} \, {}^t X W^{1/2} W^{1/2} Y$$

$$= ({}^t X W X)^{-1} \, {}^t X W Y$$

on sait que $\hat{\beta}$ est un estimateur sans biais de β

et que $\mathrm{Var}(\hat{\beta}) = \sigma^2 ({}^t T T)^{-1}$

$$= \sigma^2 ({}^t X W^{1/2} W^{1/2} X)^{-1}$$

$$= \sigma^2 ({}^t X W X)^{-1}$$

Si on ajoute l'hypothèse de normalité, on sait alors de plus que $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}\left(\beta, \sigma^2 ({}^t X W X)^{-1}\right)$

4°) On a $Y_{ij} = a + b x_i + \varepsilon_{ij}$ avec $\mathrm{Var}(\varepsilon_{ij}) = \sigma^2$ et $\varepsilon_{ij} \perp\!\!\!\perp \varepsilon_{ij'}$

$$\Rightarrow \quad Y_i = \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} Y_{ij}$$

$$= \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} (a + b x_i + \varepsilon_{ij})$$

$$= a + b x_i + \frac{1}{m_i} \sum_{j=1}^{m_i} \varepsilon_{ij}$$

$$= a + b x_i + u_i \quad \text{avec} \quad u_i \perp\!\!\!\perp u_j$$

et $\mathrm{Var}(u_i) = \frac{1}{m_i^2} \sum_{j=1}^{m_i} V(\varepsilon_{ij})$

$$= \frac{\sigma^2}{m_i}$$

donc, on a le modèle précédent avec $W^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{m_1} & & \\ & \ddots & \\ & & \frac{1}{m_n} \end{pmatrix}$

d'où $\hat{\beta} = ({}^t X W X)^{-1} \, {}^t X W Y$ avec $\beta = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

a $W = \begin{pmatrix} m_1 & & \\ & \ddots & \\ & & m_n \end{pmatrix}$ et $X = \begin{pmatrix} 1 & x_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_n \end{pmatrix}$

Application numérique :

On a $X = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1.5 \\ 1 & 2 \\ 1 & 2.1 \end{pmatrix}$

$$W = \begin{pmatrix} 3 & & & \\ & 3 & & \\ & & 3 & \\ & & & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad {}^t X W X = \begin{pmatrix} \sum m_i & \sum m_i x_i \\ \sum m_i x_i & \sum m_i x_i^2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 12 & 3 \times 6,6 \\ 3 \times 6.6 & 3 \times 11.60 \end{pmatrix}$$

après calcul $\left({}^t X W X\right)^{-1} = \dfrac{1}{\det\left({}^t X W X\right)} \begin{pmatrix} 34.8 & -19.8 \\ -19.8 & 12 \end{pmatrix}$

$$\text{a} \quad \det\left({}^t X W X\right) = 12 \times 34.8 - 19.8^2$$

$${}^t X W = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ m_1 x_1 & m_2 x_2 & m_3 x_3 & m_4 x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 3 \\ 3 & 4.5 & 6 & 6.3 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} 3.038 \\ 3,10666 \\ 3,228333 \\ 3,148333 \end{pmatrix}$$

$$\text{d'où} \quad \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 2,8840728 \\ 0,1492488 \end{pmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \hat{a} \\ \leftarrow \hat{b} \end{matrix}$$

Exo 4

1°)

a)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b) Si l'on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$

alors $\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}$

$= 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$

$= 4$

puisque $\det A \neq 0$, on a $rg(X) = 3$

c) On a $\beta = \begin{pmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \hat{\beta} = ({}^tXX)^{-1}\, {}^tXY$

avec $Y = \begin{pmatrix} 6.702 \\ 2.698 \\ 1.846 \\ 5.578 \end{pmatrix}$

a ${}^tXX = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

$= \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

d'où $({}^tXX)^{-1} = \begin{pmatrix} 1/4 & 0 & 0 \\ 0 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

$$^tXY = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6.702 \\ 2.698 \\ 1.846 \\ 5.578 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 16.824 \\ 7.736 \\ 1.976 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 4.206 \\ 1.934 \\ 0.494 \end{pmatrix}$$

2)

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\hookrightarrow \; ^tXX = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \hat{\beta} = \begin{pmatrix} 4.297 \\ 1.934 \\ 0.494 \end{pmatrix}$$

Fin...