L2 & L3 MASS
Université de Nice-Sophia Antipolis
Sylvain Rubenthaler

REMISE À NIVEAU, feuille n° 2 (exercices + corrigés)

1 Énoncés des exercices

1. Résoudre les systèmes suivants.

   (a)
$$\begin{cases} x & +y & & = 0 \\ 2x & -y & +3z & = 3 \\ x & -2y & -z & = 3 \end{cases}$$

   (b)
$$\begin{cases} x & +3y & = 1 \\ 2x & +y & = -3 \\ 2x & +2y & = 0 \end{cases}$$

2. Qu'est-ce qui est faux dans le calcul suivant ?

$$\begin{aligned} 0 &= 0+0+0+\dots \\ &= (1-1)+(1-1)+(1-1)+\dots \\ &= 1+(-1+1)+(-1+1)+(-1+1)+\dots \\ &= 1 \end{aligned}$$

3. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes. Si c'est possible, calculer la somme.

   (a) $\sum_{n=1}^{+\infty} 5\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

   (b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-6)^{n-1}}{5^{n-1}}$

   (c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n-1}}{4^n}$

   (d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(\sqrt{2})^n}$

   (e) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\pi^n}{3^{n+1}}$

   (f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^n}{3^{n-1}}$

   (g) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n}{n+5}$

(h) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{n}$

(i) $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{n^2-1}$

(j) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{n(n+2)}$

(k) $\sum_{k\geq 2} \frac{k^2}{k^2-1}$

(l) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{n^2+4n+3}$

(m) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}$

4. Étudier la nature des séries de termes généraux suivants.

   (a) $u_n = \frac{1}{n!}$

   (b) $u_n = \frac{1}{\ln n}$

   (c) $u_n = e^{-n^2+n}$

5. Déterminer si les séries suivantes sont convergentes ou divergentes (on notera u_n le terme général).

   (a) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^4}$

   (b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{1/4}}$

   (c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1}$

   (d) $\sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n^2}$

   (e) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sin n}{n^2}$

   (f) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{\sin^2 n}{n}$

   (g) $\sum_{n\geq 1} \frac{\cos(n\pi)}{n^{3/4}}$

   (h) $\sum_{n\geq 1} \frac{\sin(n\pi/2)}{n!}$

   (i) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \sin(\pi/n)$

   (j) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \cos(\pi/n)$

   (k) $\sum_{n\geq 1} \left(-\frac{n}{5}\right)^n$

6. Calculer les déterminants des matrice suivantes.

   (a)
$$\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

   (b)
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   (c)
$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

7. Calculer les intégrales suivantes.

   (a) $I = \int_{-1}^{5} x^5 dx$

   (b) $I = \int_{2}^{8} (4x + 3)dx$

   (c) $I = \int_{0}^{4} (1 + 3y - y^2)dy$

   (d) $I = \int_{0}^{1} x^{4/5} dx$

   (e) $I = \int_{\pi}^{2\pi} \cos x dx$

   (f) $I = \int_{0}^{2} x(2 + x^5)dx$

   (g) $I = \int_{1}^{4} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

   (h) $I = \int_{0}^{1} (3 + x\sqrt{x})dx$

   (i) $I = \int_{0}^{1} xe^x dx$

8. Dire si les séries de terme général u_n sont absolument convergentes, convergentes, divergentes.

   (a) $u_n = \frac{n^2}{2^n}$

   (b) $u_n = \frac{(-10)^n}{n!}$

   (c) $u_n = (-1)^n \frac{n}{5+n}$

   (d) $u_n = \frac{(-1)^n e^{1/n}}{n^3}$

   (e) $u_n = (-1)^{n-1} \frac{2^n}{n^4}$

   (f) $u_n = \frac{(-1)^n n}{n^2+1}$

9. Vérifier que les formules suivantes sont correctes en calculant des dérivées.

   (a) $\int \frac{x}{\sqrt{x^2+1}} dx = \sqrt{x^2 + 1} + C$

   (b) $\int x \cos x dx = x \sin x + \cos x + C$

   (c) $\int \cos^3 x dx = x \sin x - \frac{1}{3} \sin^3 x + C$

   (d) $\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2}{3b^2}(bx - 2a)\sqrt{a + bx} + C$ (a, b des constantes quelconques)

10. Calculer les primitives suivantes par changement de variable.

    (a) $\int x^3(2 + x^4)^5 dx$, sur $x \geq 0$

    (b) $\int x^2 \sqrt{x^3 + 1} dx$

    (c) $\int \frac{dt}{(1-6t)^4}$, sur $t > 1/6$

    (d) $\int \cos^3 x \sin x dx$, sur $x \in [0; \pi/2]$

2 Corrigés des exercices

1.

(a) On calcule une suite de systèmes équivalents.

$$\begin{cases} x & +y & & = 0 \\ & -3y & +3z & = 3 \\ & & -4z & = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +y & & = 0 \\ & -3y & +3z & = 0 \\ & & -4z & = 0\,. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions est donc le singleton $\{(1, -1, 0)\}$.

(b) On calcule une suite de systèmes équivalents.

$$\begin{cases} x & +3y & = 1 \\ & -5y & = -5 \\ & -4y & = -2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x & +3y & = 1 \\ & -5y & = -5 \\ & 0 & = 2 \end{cases}$$

Le système n'a pas de solution (autrement dit, l'ensemble des solutions est $\emptyset$).

2. Le passage de la 2ème à la 3ème ligne est faux car $\lim_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n} 0 \neq \lim_{n\to 0}(1 + \sum_{k=1}^{n}(-1+1))$.

3.

(a) Série géométrique de raison $2/3$ ($\in]-1; 1[$) donc elle est convergente, de somme $5 \times \frac{1}{1+\frac{2}{3}} = 3$.

(b) Série géométrique de raison $-6/5$ ($\notin]-1; 1[$) donc elle est divergente.

(c) Série géométrique de raison $-3/4$ ($\in]-1; 1[$) donc elle est convergente, de somme $\frac{1}{4} \times \frac{1}{1+\frac{3}{4}} = \frac{1}{7}$.

(d) Série géométrique de raison $1/\sqrt{2}$ ($\in]-1; 1[$) donc elle est convergente, de somme $\frac{1}{1-\frac{1}{\sqrt{2}}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}-1}$.

(e) Série géométrique de raison $\pi/3$ ($\notin]-1; 1[$) donc elle est divergente.

(f) Série géométrique de raison $e/3$ ($\in]-1; 1[$) donc elle est convergente, de somme $e \times \frac{1}{1-\frac{e}{3}} = \frac{3}{3-e}$.

(g) Le terme général $\to 1$ donc la série diverge.

(h) Série de Riemann divergente.

(i) La série est à termes positifs et nous avons $\frac{2}{n^2-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ qui est le terme général d'une série de Riemann convergente. Donc la série converge.

(j) La série est à termes positifs et nous avons $\frac{(n+1)^2}{n(n+2)} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc la série diverge.

(k) La série est à termes positifs et nous avons $\frac{n^2}{n-1} \underset{n\to+\infty}{\sim} 1$ donc la série diverge.

(l) La série est à termes positifs et nous avons $\frac{2}{n^2+4n+3} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{2}{n^2}$ qui est le terme général d'une série convergente, donc la série converge.

(m) Nous avons $\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$

4.

(a) On regarde $\frac{u_{n+1}}{u_n} = n + 1 \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ donc, par le critère de d'Alembert, la série diverge.

(b) Nous avons pour $n \geq 2$, $u_n \geq \frac{1}{n}$ donc, par comparaison, la série diverge.

(c) Nous avons $(u_n)^{1/n} = \exp(-n + 1) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$, donc, par critère de Cauchy, la série diverge.

5.

(a) Série de Riemann convergente.

(b) Série de Riemann divergente.

(c) La série est à termes positifs et $\frac{n}{n^2+1} \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$, terme général d'une série divergente, donc la série diverge.

(d) Nous avons $\frac{\ln n}{\sqrt{n}} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc $\exists n_0$ tel que, $\forall n \geq n_0$, $\frac{\ln n}{n^2} \leq \frac{1}{n^{3/2}}$ qui est le terme général d'une série convergente. Toutes les séries sont ici à termes positifs donc la série considérée converge.

(e) Nous avons $|u_n| \leq \frac{1}{n^2}$ donc la série converge absolument.

(f) La suite (u_n) est de signe alternée et $|u_n| = \frac{\sin^2 n}{n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, par théorèmes des séries alternées, la série converge.

(g) Nous avons $\cos(n\pi) = (-1)^n$ et $1/n^{3/4} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. Donc, par théorèmes des séries alternées, la série converge.

(h) Nous avons $|u_n| \leq \frac{1}{n!}$ qui est le terme général d'une série convergente. Donc la série converge.a

(i) Nous avons $\sin(\pi/n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ car la fonction sin est continue et $\sin(0) = 0$. Donc, par théorèmes des séries alternées, la série converge.

(j) Nous avons $\cos(\pi/n) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ car la fonction cos est continue et $\cos(0) = 0$. Donc la série diverge.

(k) Nous avons $|u_n| = \frac{n^n}{5^n} \geq \frac{6^n}{5^n}$, $\forall n \geq 6$. Et $\frac{6^n}{5^n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$, donc la série diverge.

6.

(a) $\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 3 \times 1 - (-1) \times 1 = 4$

(b) Développons suivant la dernière ligne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} &= 1 \times \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} + (-1) \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 2 - 1 = 1\,.\end{aligned}$$

(c) Développons suivant la première colonne :

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \end{vmatrix} &= 4 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \\ &= 4 \times (-3) = -3\,.\end{aligned}$$

7.

(a)

$$\begin{aligned} I &= [\frac{x^6}{6}]_{-1}^{5} \\ &= \frac{5^6 - 1}{6} \end{aligned}$$

(b) $I = \left[2x^2 + 3x\right]_2^8 = 2 \times 64 + 24 - 8 - 6 = 138$

(c) $I = \left[y + \frac{3}{2}y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_0^4 = 4 + \frac{48}{2} - \frac{64}{3} = \frac{12+69-64}{3} = \frac{17}{3}$

(d) $I = \left[\frac{5}{9}x^{\frac{9}{5}}\right]_0^1 = \frac{5}{9}$

(e) $I = [\sin x]_{\pi}^{2\pi} = 0$

(f) $I = \left[x^2 + \frac{x^6}{6}\right]_0^2 = 4 + \frac{2048}{3}$

(g) $I = \left[2\sqrt{x}\right]_1^4 = 4 - 2 = 2$

(h) $I = \left[3x + \frac{2}{5}x^{5/2}\right]_0^1 = 3 + \frac{2}{5} = \frac{17}{5}$

(i) Intégration par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^1 xe^x dx &= [xe^x]_0^1 - \int_0^1 e^x dx \\ &= e^1 - [e^x]_0^1 \\ &= 1 \end{aligned}$$

8.

(a) Nous avons $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)}{2n} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{2} < 1$ donc la série (de termes positifs) converge.

(b) Nous avons $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right| = \frac{10}{n+1} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 0$ donc la série converge absolument.

(c) Nous avons $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1$ donc la série ne converge pas.

(d) Nous avons $|u_n| \leq \frac{e}{n^3}$ $(\forall n \geq 1)$ donc la série converge absolument.

(e) Nous avons $|u_n| \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$ donc la série ne converge pas absolument. La série est de signes alternés. Étudions la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{x^2+1}$. Nous avons $f'(x) = \frac{(x^2+1)-2x^2}{(x^2+1)^2} = \frac{-2x^2+1}{(x^2+1)^2} \leq 0$ pour $x \geq 1$. Donc la suite $(|u_n|)$ est décroissante à partir du rang 1. Donc, par le théorème des séries alternées, la série converge.

9. Dériver.

10.

(a) On pose $u = (2 + x^4)$, $du = 3x^3$. Donc

$$\begin{aligned}\int x^3(2+x^4)dx &= \int u\frac{du}{3} \\ &= \frac{u^2}{6} + C = \frac{3x^6}{2} + C\,.\end{aligned}$$

(b) On pose $u = x^3 + 1$, $du = 2x^2$. Donc

$$\begin{aligned}\int x^2\sqrt{x^3+1}dx &= \int \sqrt{u}\frac{du}{2} \\ &= \frac{u^{3/2}}{3} = \frac{(x^3+1)}{3}\,.\end{aligned}$$

(c) On pose $u = 1 - 6t$, $t = (1-u)/6$, $dt = -du/6$. Donc

$$\begin{aligned}\int \frac{dt}{(1-6t)^4} &= \int \frac{-du}{6u^4} \\ &= \frac{1}{18u^3} = \frac{1}{18(1-6t)^3}\,.\end{aligned}$$

(d) On pose $u = \cos x$, $du = -\sin x dx$. Donc

$$\begin{aligned}\int \cos^3 x \sin x dx &= \int -u^3 du \\ &= -\frac{u^4}{4} + C \\ &= -\frac{\cos^4 x}{4} + C\,.\end{aligned}$$

Références

[1] Xavier Gourdon. *Les Maths en tête : Mathématiques pour M' : algèbre*. Ellipses, 1998.

[2] Xavier Gourdon. *Les Maths en tête : Mathématiques pour M' : analyse*. Ellipses, 1998.

[3] Jean-Pierre Marco, Philippe Thieullen, and Weil Jacques-Arthur. *Mathématiques L2 Cours complet avec 700 tests et exercices corrigés*. Pearson, 2007.