L2 - Méthodes numériques
Université de Nice-Sophia Antipolis
Sylvain Rubenthaler
http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

TP no. 1

On cherche une racine du polynôme $X^2 - 2$ dans l'intervalle $[0; +\infty[$. Soit $f : x \in \mathbb{R} \mapsto f(x) = x^2 - 2$. Soit ϕ une fonction de $\mathbb{R} \to]0; +\infty[$. Soit $g : x \in \mathbb{R} \mapsto x - \phi(x)f(x)$. Rappel : Si u est un point fixe de g ($g(u) = u$) alors $f(u) = 0$. Soit $x_0 \in [1; 2]$ (quelconque). On définit la suite $(x_n)_{n \geq 0}$ par récurrence : $x_{n+1} = g(x_n)$. Une condition suffisante pour que $x_n \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} x_\infty$ avec x_∞ point fixe de g est :

$$\forall x \in [1; 2]\,,\ |g'(x)| < 1 \text{ et } g(x) \in [1; 2]\,. \tag{0.1}$$

1. Trouver ϕ telle que g vérifie (0.1) (on pourra prendre ϕ constante).
2. Écrire un programme qui calcule u racine de f (avec la suite (x_n) ci-dessus).
3. (*plus difficile*) Quelle est la précision du résultat pour n fixé ?

Corrigé du TP no. 1

1. Prenons ϕ constante égale à 1/3.
2.

Algorithm 1 Calcul de la racine

```
n=100 ;
s=0 ;
x=3 ;
for i=1 :n
x=x-(x^2-2)/3 ;
end
disp(x) ;
```

3. Pour tout $x \in [1;2]$, $|g'(x)| = |1 - 2x/3| \leq 1/3$. Donc ($\forall n \geq 0$,$\forall p > 0$)

$$\begin{aligned} |x_{n+p} - x_n| &= |g(x_{n+p-1}) - g(x_{n-1})| \\ &\leq (1/3)|x_{n+p-1} - x_{n-1}| \\ \text{(par récurrence)} \quad &\leq (1/3)^n |x_p - x_0| \\ &\leq (1/3)^n \,. \end{aligned}$$

Donc la suite (x_n) est une suite de Cauchy (et donc elle converge vers une limite x_∞). Soit $\epsilon > 0$. Il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq N \Rightarrow |x_n - x_\infty| < \epsilon$. Donc si $n \in \mathbb{N}$ et p tel que $n + p \geq N$, $|x_\infty - x_n| \leq |x_\infty - x_{n+p}| + |x_{n+p} - x_n| \leq \epsilon + (1/3)^n$. Ceci est vrai $\forall \epsilon > 0$ donc $|x_\infty - x_n| \leq (1/3)^n$.