Université de Nice-Sophia Antipolis
L3 MIAGE - Processus stochastiques et analyse de données
Sylvain Rubenthaler `http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Partiel 1 - sujet A -corrigé

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Toutes les réponses valent 3 points.

1. Soit F la fonction de répartition. Pour tout t : $F(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)e^{-x}dx$. Donc

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0 \\ \int_0^t e^{-x}dx = 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

2. On peut utiliser la formule du cours. La réponse est $C_3^2 \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{3\times 2}{2} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{8}$.
3. On utilise la formule de changement de variable. Soit f la densité de Y et $g(t) = t^3$. On remarque que Y^3 est à valeurs dans $[0;1]$. La densité cherchée est la fonction suivante de x :

$$\frac{f(g^{-1}(x))}{g'(g^{-1}(x))} = \mathbf{1}_{[0;1]}(x)\frac{4\sqrt{1-(x^{1/3})^2}}{\pi} \times \frac{1}{3(x^{1/3})^2} = \mathbf{1}_{[0;1]}(x)\frac{4\sqrt{1-x^{2/3}}}{3\pi x^{2/3}}\,.$$

4.

Calculons $\mathbb{E}(2X+3) = 2\mathbb{E}(X)+3$, $\mathbb{E}((2X+3)^2) = 4\mathbb{E}(X^2)+9+12\mathbb{E}(X) = 4\mathbb{E}(X^2)+9$ car $\mathbb{E}(X) = 0$. Donc $\mathrm{Var}(2X+3) = 4\mathbb{E}(X^2)+9-(2\mathbb{E}(X)+3)^2 = 4\mathrm{Var}(X) - 12\mathbb{E}(X) = 4\mathrm{Var}(X) = 4$.

5. $\mathbb{E}(X^4) = \frac{1}{4}((-1)^4+0^4+1^4+2^4) = \frac{1}{4}(2+16) = \frac{18}{4} = \frac{9}{2}$
6.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(2^X) &= \sum_{k\geq 0} \frac{3}{4}\left(1-\frac{3}{4}\right)^k 2^k \\ &= \frac{3}{4}\sum_{k\geq 0}\frac{1}{2^k} = \frac{3}{4}\frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{3}{2}\,. \end{aligned}$$

7. Soit U la variable uniforme simulée par le programme. La variable V peut prendre les valeurs 0 et 1. Calculons

$$\mathbb{P}(V=1) = \mathbb{P}(U > 3/4) = \int_0^1 \mathbf{1}_{[0;1]}(x)\mathbf{1}_{[3/4;+\infty[}(x)dx = \int_{3/4}^1 1dx = \frac{1}{4}\,.$$