Université de Nice-Sophia Antipolis
L3 MIAGE - Processus stochastiques et analyse de données
Sylvain Rubenthaler, `http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Partiel 1 - sujet D -corrigé

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Toutes les réponses valent 3 points.

1. La fonction $g : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto x^2$ est bijective croissante, d'inverse : $g^{-1} : x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \sqrt{x}$. Soit h la densité de X^2 et f la densité de X. Pour $t \leq 0$, $h(t) = 0$ (car $X^2(\omega) \geq 0, \forall \omega$). Et pour $t \geq 0$, la formule de changement de variable nous donne :

$$\begin{aligned} h(t) &= \frac{f(g^{-1}(t))}{g'(g^{-1}(t))} \\ &= \frac{\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(\sqrt{t})e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} \\ &= \frac{e^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}\,. \end{aligned}$$

   Donc $h(t) = \mathbf{1}_{[0;+\infty[}(t)\frac{e^{-\sqrt{t}}}{\sqrt{t}}$.

2. Intégrations par parties :

$$\begin{aligned} \int_0^\pi x\sin(x)dx &= [x(-\cos(x))]_0^\pi + \int_0^\pi \cos(x)dx \\ &= \pi + [\sin(x)]_0^\pi \\ &= \pi + 0\,. \end{aligned}$$

3. Formule du cours : $C_4^3(1/6)^3(1-1/6)^{4-3} = 4 \times \frac{1}{6^3} \times \frac{5}{6} = \frac{20}{486} = \frac{5}{3\times3\times6\times5} = \frac{5}{324}$.
4.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)3e^{-3x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} x3e^{-3x}dx \\ &= [-xe^{-3x}]_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} e^{-3x}dx \\ &= \frac{1}{3}\,, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X^2) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x^2\mathbf{1}_{[0;+\infty[}(x)3e^{-3x}dx \\ &= \int_0^{+\infty} x^2 3e^{-3x}dx \\ &= [-x^2e^{-3x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} 2xe^{-3x}dx \\ &= [\frac{2}{3}xe^{-3x}]_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} \frac{2}{3}e^{-3x}dx \\ &= [\frac{2}{9}e^{-3x}]_0^{+\infty} = \frac{2}{9}\,, \end{aligned}$$

   donc $\mathrm{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{1}{9}$.

5.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in [1/2; 7/6]) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \mathbf{1}_{[1/2;7/6]}(x) \times \frac{\mathbf{1}_{[0;2]}(x)}{2} dx \\
&= \int_{1/2}^{7/6} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2}\left(\frac{7}{6} - \frac{3}{6}\right) = \frac{1}{3}\,.
\end{aligned}$$

6. Nous avons $\mathbb{E}(U_1) = \int_{-\infty}^{+\infty} u \times \mathbf{1}_{[0;1]}(u) du = \int_0^1 u du = \frac{1}{2}$, $\mathbb{E}(U_1^2) = \int_0^1 u^2 du = \frac{1}{3}$, $\mathrm{Var}(U_1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$. Soit $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} \leq 0,51\right) &= \mathbb{P}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} - \frac{1}{2} \leq 0,1\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{(1/\sqrt{12})}\left(\frac{U_1 + \cdots + U_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \leq 0,1 \times \sqrt{n} \times \sqrt{12}\right) \\
\text{(par le TCL)} \quad &= \mathbb{P}\left(Z \leq 0,1 \times \sqrt{4 \times 12} \times \sqrt{12}\right) = \mathbb{P}(Z \leq 2,4) = 0,9918\,.
\end{aligned}$$

7. $\mathbb{P}(Z > 1/2) = 1 - \mathbb{P}(Z \leq 1/2) = 1 - 0,6915 = 0,3085$.