

NOM :
PRÉNOM :

Partiel I (A)

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Vous écrirez vos calculs et vos réponses dans les encadrés. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

1. Soit X à valeurs dans $\{1, 2, 3, 4\}$ telle que $\mathbb{P}(X=1) = 1/3$, $\mathbb{P}(X=2) = 1/4$, $\mathbb{P}(X=3) = 1/4$.

- (a) Calculer $\mathbb{P}(X \geq 2)$.

$$\mathbb{P}(X=4) = 1 - (\mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) + \mathbb{P}(X=3)) = 1/6$$
$$\mathbb{P}(X \geq 2) = \sum_{k=2}^4 \mathbb{P}(X=k) = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{2}{3}$$

- (b) Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^4 k \mathbb{P}(X=k) = 1 \times \frac{1}{3} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{6}$$

donc $\mathbb{E}[X] = 9/4$

- (c) Déterminer (sans démonstration) la fonction de répartition de X . (Attention, ici on ne demande que la

réponse.)

La fonction de répartition F est :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1/3 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 7/12 & \text{si } 2 \leq x < 3 \\ 5/6 & \text{si } 3 \leq x < 4 \\ 1 & \text{si } x \geq 4. \end{cases}$$

- (d) Calculer la variance de X .

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}[X])^2$$
$$\text{Or, } \mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=1}^4 k^2 \mathbb{P}(X=k)$$
$$= 1^2 \times \frac{1}{3} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} + 4^2 \times \frac{1}{6}$$
$$= \frac{25}{4}$$
$$\text{Donc } \text{var } X = \frac{25}{4} - \left(\frac{9}{4}\right)^2 = \frac{19}{16}$$