2. Soient $X_1, X_2, \ldots$ des tirages indépendants de $\mathcal{B}(1/2)$ (Bernoulli de paramètre 1/2). Soit $T = \inf\{n \geq 2 : X_{n-1} = X_n\}$ (c'est le plus petit n tel que $X_{n-1} = X_n$).

(a) Calculer $\mathbb{P}(X_2 \neq X_1)$.

Puisque $X_1(\Omega) = X_2(\Omega) = \{0, 1\}$,

$$\mathbb{P}(X_2 \neq X_1) = \mathbb{P}\left[(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1) \text{ ou } (X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0)\right]$$
$$= \mathbb{P}(X_1 = 0 \text{ et } X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1 \text{ et } X_2 = 0)$$ car les événements sont disjoints
$$= \mathbb{P}(X_1 = 0)\mathbb{P}(X_2 = 1) + \mathbb{P}(X_1 = 1)\mathbb{P}(X_2 = 0)$$ par indépendance de X_1 et X_2
$$= \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2} \times \tfrac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

(b) On admet que $\mathbb{P}(T > k) = (1/2)^{k-1}$ pour tout $k \geq 1$. Calculer $\mathbb{P}(T = k)$ pour tout $k \geq 2$.

Soit F la fonction de répartition de T

$\forall k \in \mathbb{N}^*$, $F(k) = 1 - \mathbb{P}(T > k) = 1 - (\tfrac{1}{2})^{k-1}$

Donc, $\forall k$ entier supérieur à 2, $\mathbb{P}(T = k) = F(k) - F(k-1) = \left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$.

(c) Calculer $\mathbb{P}(1 \leq T \leq 10)$.

$$\mathbb{P}(1 \leq T \leq 10) = \sum_{k=1}^{10} \mathbb{P}(T = k)$$
$$= \sum_{k=2}^{10} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^{k-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}\right] \quad \text{car } \mathbb{P}(T = 1) = 0.$$
$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{9}$$
$$= \frac{511}{512}.$$

3. Soit X une variable de loi uniforme sur un intervalle $[a; b]$.

(a) Calculer $\mathbb{E}(X)$ en fonction de a et b (refaire la démonstration du cours).

Voir le cours.

(b) On suppose maintenant que $a = 0$ et $\mathbb{E}(X) = 1$, que vaut b ?

$\mathbb{E}[X] = \frac{a+b}{2}$ donc

$\frac{0+b}{2} = 1$ donc $b = 2$.