4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} (x+1)/2 & \text{si } x \in [-1;0[\\ 1/2 & \text{si } x \in [0;1] \\ -(x-2)/2 & \text{si } x \in]1;2] \\ 0 & \text{ailleurs.} \end{cases}$$

Calculer la fonction de répartition F associée à cette densité.

$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt.$

Donc :

- si $x < -1$, $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \underbrace{f(t)}_{0}\,dt = 0$
- si $-1 \leq x < 0$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{x} \frac{t+1}{2}\,dt$
$$= \frac{x^2}{4} + \frac{x}{2} + \frac{1}{4}$$
- si $0 \leq x < 1$,
$$F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{0} \frac{t+1}{2}\,dt + \int_{0}^{x} \frac{1}{2}\,dt$$
$$= \frac{x^2}{2} + \frac{1}{4}$$
- si $1 \leq x < 2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{-1} 0\,dt + \int_{-1}^{0} \frac{t+1}{2}\,dt + \int_{0}^{1} \frac{1}{2}\,dt + \int_{1}^{x} -\frac{t-2}{2}\,dt$
$$= -\frac{x^2}{4} + x$$
- si $x \geq 2$, $F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\,dt - \int_{x}^{\infty} \underbrace{f(t)}_{=0}\,dt$
$$= 1 \text{ car } f \text{ est une densité.}$$

Finalement $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -1 \\ x^2/4 + x/2 + 1/4 & \text{si } -1 \leq x < 0 \\ x^2/2 + 1/4 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x^2}{4} + x & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2. \end{cases}$