Université Nice. Agrégation de Mathématiques.

TRAVAUX PRATIQUES NUMÉRO 8

PROCESSUS DE GALTON WATSON II

Ces travaux pratiques visent à poursuivre l'étude du processus de Galton-Watson amorcée dans les Travaux Pratiques Numéro 7. Il est donc nécessaire de terminer dans un premier temps les quatre exercices énoncées dans le polycopié précédent afin de pouvoir entamer celui-ci.

1. Objectif

Dorénavant, nous désignons par $(X_n)_{n\geq 0}$ un processus de Galton-Watson issu d'un unique ancêtre et associé à une loi de repoduction ν (sur $\mathbb{N}$). Autrement dit, la variable X_0 vaut presque-sûrement 1 et la loi de la variable X_1 n'est rien d'autre que celle de ν.

Nous supposons que la loi ν est de carré intégrable et désignons de fait :

$$m \equiv \int x d\nu(x),\ \sigma^2 \equiv \int (x-m)^2 d\nu(x).$$

Nous visons désormais à illustrer en profondeur le théorème 2 démontré dans le T.P. Numéro 7 :

Théorème 2 : Si $m > 1$, alors la suite de v.a. $(W_n \equiv m^{-n} X_n)_{n\geq 1}$ converge presque-sûrement vers une v.a. W positive, de moyenne 1 et de carré intégrable.

Dans la suite, nous ferons un choix similaire à celui effectué dans le T.P. Numéro 7 : nous choisirons pour ν une loi géométrique de paramètre $2/5$. Rappelons que dans un tel cas, la moyenne de m vaut $3/2$ et que la probabilité d'extinction de la chaîne est donnée par $2/3$. Les simulations informatiques illustrant ces résultats ont été établies dans le T.P. précédent : voir Exercice 1. La visualisation du phénomène de convergence énoncé dans le Théorème ci-dessus a été proposée dans les Exercices 2 et 3. Nous ne reviendrons pas sur ces points au cours de cette séance, mais concentrerons notre étude sur la loi de W.

2. Loi Empirique de W_{20}

Nous cherchons à étudier, d'un point de vue informatique la loi de W. N'ayant aucun moyen à disposition pour la simuler, nous commençons par simuler la loi d'une variable W_n, pour un n suffisamment grand. En effet, le théorème de convergence presque sûre énoncé dans le paragraphe précédent assure la convergence en loi de la suite de $(W_n)_{n\geq 1}$ vers la loi de W.

Malheureusement, nous ne disposons d'aucun renseignement sur la qualité de l'approximation de W par W_n, pour un n donné. Nous sommes donc contraints dans un premier temps de choisir n suffisamment grand au regard de nos observations graphiques ... et des capacités de calcul des ordinateurs. Nous verrons par la suite s'il est possible ou non de vérifier par d'autres méthodes la validité de l'approximation.

En fait, le théorème de convergence assure que certaines réalisations de la suite de $(X_n)_{n\geq 1}$ (en fait, celles ne s'éteignant pas) se comportent asymptotiquement de façon exponentielle. La simulation de la descendance d'une génération nécessitant de simuler autant de fois la loi ν que la taille de la génération, il est vain d'espérer un choix de n très elevé.

Par ailleurs, nous pouvons constater sur les simulations effectuées dans l'exercice 3 que la convergence presque sûre énoncée dans le théorème 2 est assez rapidement visible : la suite semble relativement stationnaire au bout d'une quinzaine de générations. Cette appréciation est très empirique, mais nous permet de nous accorder sur le choix suivant : $n = 20$ est suffisamment grand d'un point de vue graphique et suffisamment petit d'un point de vue de la simulation.

La suite de ce paragraphe est donc dévolue à l'étude de la loi de W_{20}, que nous espérons proche de la loi de W (dans un sens à déterminer).

L'étude informatique d'une loi théorique se déduit, en dimension quelconque, du théorème fondamental de la statistique, et plus particulièrement du théorème de Glivenko Cantelli en dimension 1. Afin de se représenter une loi μ donnée, le principe est le suivant :

(1) Simuler un L-échantillon de μ, et noter $(x_1, ..., x_L)$ la réalisation associée, L désignant ici un entier.

(2) Considérer la loi empirique :

$$\overline{\mu}_L = L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \delta_{x_i}.$$

Le principe fondamental de la statistique nous assure alors que, pour L suffisamment grand, $\overline{\mu}_L$, ressemble à μ. La représentation de la loi μ_L est alors possible de deux façons : représenter l'histogramme associé aux valeurs $x_1, ..., x_L$ ou représenter la fonction de répartition de μ_L donnée par :

$$\forall\, x \in \mathbb{R},\ \overline{F}_L(x) = L^{-1} \sum_{i=1}^{L} \mathbf{1}_{]-\infty, x_i]}(x).$$

Ces deux types de représentations sont largement abordées dans le T.P. Numéro 1.

Dans ce contexte, nous proposons dans un premier temps l'exercice suivant, destiné à faciliter la simulation de W_{20} :

Exercice 1 : Modifier les algorithmes de simulation de la chaîne de Galton-Watson de façon à récupérer en sortie une simulation de W_{20} et non plus une simulation du vecteur $(X_1, ..., X_{20})$.

Exercice 2 : Proposer une méthode pour simuler un 1000-échantillon de loi W_{20}. Représenter l'histogramme associé et la fonction de répartition empirique associée. Que dire du point 0 pour la loi de W_{20} ? Expliquer ce résultat.

3. Transformée de Laplace de W

D'un point de vue théorique, la connaissance de la loi de W peut être précisée à l'aide du théorème suivant :

Théorème 3 : En désignant par φ la fonction génératrice de la loi de reproduction ν (i.e. de la v.a. X_1), nous affirmons :

$$\forall\, s \geq 0,\ \mathbb{E}[\exp(-msW)] = \varphi\big(\mathbb{E}[\exp(-sW)]\big).$$

Autrement dit, la transformée de Laplace de la loi de W, notée ψ, est solution de l'équation fonctionnelle $\varphi(\psi(.)) = \psi(m.)$. De plus, s'il existe une autre v.a. Y, de moyenne égale à 1, dont la transformée de Laplace vérifie également l'équation fonctionnelle, alors W et Y ont même loi.

Nous verrons en annexe comment en déduire le corollaire suivant :

Corollaire 4 : La probabilité $\mathbb{P}\{W = 0\}$ est exactement égale à la probabilité d'extinction.

Sous nos hypothèses, rappelons que ν suit une loi géométrique de paramètre c. Dans ce cas :

$\forall\ s \in [0,1],\ \varphi(s) = c(1-(1-c)s)^{-1}$.

Avant d'essayer de résoudre d'un point de vue théorique l'équation fonctionnelle, nous visons à vérifier informatiquement la validité du théorème 3. Bien entendu, une telle entreprise souffre des difficultés rencontrées dans la section précédente : nous ne savons pas simuler explicitement la loi de W. De fait, nous allons tester le théorème 3 en remplaçant la variable W par la variable W_{20}. Cette approximation est justifiée par la convergence suivante :

$$\forall\ s \geq 0,\ \lim_{n\to+\infty} \mathbb{E}\big(\exp(-sW_n)\big) = \mathbb{E}\big(\exp(-sW)\big).$$

Remarquer à ce propos que les applications $(s \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbb{E}(\exp(-sW_n))$ sont équicontinues, et de fait convergent uniformément sur tout compact (rappelons que les espérances des v.a. $(W_n)_{n\geq 1}$ et W sont toutes égales à 1).

La stratégie retenue consiste à donner un estimateur empirique de la quantité $\mathbb{E}(\exp(-sW_{20}))$, pour $s > 0$ fixé. En vertu de la discussion menée dans la section précédente, nous espérons que cette quantité approche convenablement la valeur de $\psi(s)$.

Dans ce contexte, nous vous proposons l'exercice suivant :

Exercice 3 :

(1) Simuler 1000 réalisations de W_{20}.

(2) Pour $k \in \{1, ..., 500\}$, donner la valeur de l'estimateur de $\mathbb{E}(\exp(-0.01 \times k \times W_{20}))$ associé à l'échantillon simulé.

(3) Représenter les estimations obtenues sous une forme graphique.

Nous sommes en mesure de vérifier le théorème 3 :

Exercice 4 :

(1) Simuler 1000 réalisations de W_{20}.

(2) Pour $k \in \{1, ..., 500\}$, donner les valeurs des estimateurs de $\mathbb{E}(\exp(-1.5 \times 0.01 \times k \times W_{20}))$ et de $\varphi[\mathbb{E}(\exp(-0.01 \times k \times W_{20}))]$ obtenues d'après la réalisation précédente.

(3) Représenter les estimations obtenues sous une forme graphique. Conclure.

4. Résolution de l'Equation Fonctionnelle

Ce paragraphe vise à résoudre l'équation fonctionnelle dans le cadre pratique que nous avons défini : $\nu \sim \text{Geom}(2/5)$. Considérons pour cela une v.a. Y à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ de fonction de répartition :

$$\forall\ t \geq 0,\ \mathbb{P}\big\{Y \leq t\big\} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\int_0^t \exp\big(-\frac{1}{3}x\big)dx.$$

Constatons que $\mathbb{E}(Y) = 1$ et que la transformée de Laplace de Y est donnée par :

$$\begin{aligned}\forall\ s \geq 0,\ \psi(s) = \mathbb{E}\big(\exp(-sY)\big) &= \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\int_0^{+\infty} \exp\big(-(s+\frac{1}{3})x\big)dx \\ &= \frac{2}{3} + \frac{1}{9s+3} = \frac{2s+1}{3s+1}.\end{aligned}$$

Alors,

$$\forall\ s \geq 0,\ \varphi\big(\psi(s)\big) = \frac{0,4}{1-0,6\big(\frac{2s+1}{3s+1}\big)} = \frac{6s+2}{9s+2},$$

$$\forall\ s \geq 0,\ \psi\big(\frac{3}{2}s\big) = \frac{6s+2}{9s+2}.$$

On en déduit que $\forall\ s \geq 0,\ \varphi\big(\psi(s)\big) = \psi\big(\frac{3}{2}s\big)$. Autrement dit, la loi de la variable Y est solution de l'équation fonctionnelle proposée dans le théorème 3. De fait, l'unicité de la solution de cette équation assure que la loi de W admet pour fonction de répartition :

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{2}{3} + \frac{1}{3^2}\int_0^t \exp\big(-\frac{1}{3}x\big)dx.$$

Ceci est cohérent avec le corollaire 4 : la probabilité $\mathbb{P}\{W = 0\}$ est bien égale à $2/3$, i.e. à la probabilité d'extinction.

5. Comparaison de W_{20} avec la Loi Limite

Nous venons d'identifier d'un point de vue théorique la loi de W. Il devient donc inutile d'essayer d'approcher cette loi à l'aide de la suite de $(W_n)_{n\geq 1}$. En revanche, il est pertinent de se poser la question suivante : la loi de W_{20} ressemble-t-elle, comme nous l'avions espéré dans les paragraphes précédents, à la loi limite ?

De fait, la fin de la séance vise à répondre à cette interrogation. Pour cela, nous choisissons de simplifier quelque peu le probleme : nous décidons de nous focaliser sur la partie diffuse de la loi de W. Autrement dit, nous concentrons notre étude sur la loi de W conditionnée à prendre des valeurs strictement positives. Un calcul assez simple montre que cette loi est régie par la densité :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)\frac{1}{3}\exp\big(-\frac{t}{3}\big).$$

Remarquons alors que la loi conditionnelle de W_n sachant $W_n > 0$ ressemble asymptotiquement à la loi conditionnelle de W sachant $W > 0$. Ceci est laissé à titre d'exercice : il suffit de combiner la convergence p.s. de $(W_n)_{n\geq 1}$ vers W et la convergence de $(\mathbb{P}\{W_n = 0\})_{n\geq 0}$ vers $(\mathbb{P}\{W = 0\})_{n\geq 0}$.

Finalement, le problème peut se poser de la façon suivante : la loi conditionnelle de W_{20} sachant $W_{20} > 0$ est-elle proche de la loi conditionnelle de W sachant $W > 0$? Nous proposons alors les exercices suivants :

Exercice 5 : Proposer un algorithme permettant de simuler un L-échantillon suivant la conditionnelle de W_{20} sachant $W_{20} > 0$.

Exercice 6 : A l'aide de l'exercice précédent, simuler un 1000-échantillon suivant la loi conditionnelle de W_{20} sachant $W_{20} > 0$. Représenter un histogramme associé à ce tirage et comparer l'histogramme obtenu avec la densité théorique annoncée ci-dessus. Conclure.

6. Mise en Place d'un Test

La vérification graphique de l'approximation peut s'accompagner d'une vérification statistique. Nous cherchons à mettre en place un test permettant de valider ou de rejeter à un risque fixé l'hypothèse selon laquelle la loi conditionnelle de W_{20} sachant $W_{20} > 0$ suit une loi de densité :

$$t \in \mathbb{R}_+ \mapsto \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)\frac{1}{3}\exp\big(-\frac{1}{3}t\big).$$

L'acceptation de l'hypothèse par le test offrirait une confirmation statistique à la proximité des lois de W_{20} et W. En revanche,, un rejet signifierait que la loi de W_{20} diffère trop de la loi de W au regard de la finesse du test.

La procédure retenue est le test de Kolmogorov-Smirnov.

7. Test de Kolmogorov Smirnov

Le test de Kolmogorov-Smirnov est un test d'adéquation essentiellement destiné aux lois diffuses. Plus précisément, considérons le modèle statistique non paramétrique :

$$\big(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \mu^{\otimes n}\big)_{\mu \in \mathcal{P}},$$

où $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des lois de probabilité sur $\mathbb{R}$. Ceci nous permet de définir, pour une loi $\mu \in \mathcal{P}$, la statistique :

$$D_n(\mu) = \sqrt{n} \sup_{x \in \mathbb{R}} \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{]-\infty, x]}(X_i) - \mu\big(]-\infty, x]\big) \right|,$$

qui mesure l'écart entre la fonction de répartition empirique associée au n-échantillon $(X_1, ..., X_n)$ et la fonction de répartition de μ.

Supposons que μ_0 désigne une loi de probabilité continue et que nous visions à tester l'hypothèse $\mathcal{H}_0$: "$\mu = \mu_0$" contre l'hypothèse $\mathcal{H}_1$: "$\mu \neq \mu_0$".

Si la loi régissant les observations est différente de μ_0, nous nous attendons à ce que la statistique $D_n(\mu_0)$ prenne des grandes valeurs, la fonction de réparition empirique tendant à resembler (essentiellement pour n grand) à une fonction de répartition différente de celle de μ_0.

Aussi, le test d'ajustement est-il choisi de la forme :

$$\Delta_n = \mathbf{1}_{]c, +\infty[}\big(D_n(\mu_0)\big),$$

avec c tel que $\mathbb{P}_{\mu_0}\big\{D_n(\mu_0) > c\big\} = \alpha$, $0 < \alpha < 1$.

Deux méthodes sont alors envisageables pour déterminer c.

7.1. **Cas non asymptotique.** Nous savons que la loi de $D_n(\mu_0)$ sous $\mathbb{P}_{\mu_0}$ est la même que la loi de $D_n(u)$ sous $\mathbb{P}_u$, où u désigne la loi uniforme sur $[0, 1]$.

Or, la loi de $D_n(u)$ sous $\mathbb{P}_u$ est tabulée (voir par exemple Dacunha-Castelle, livre d'exercices, tome 1). Dans ce contexte, c est déterminé à partir des quantiles de la loi $D_n(u)$ sous $\mathbb{P}_u$.

En revanche, aucune d'information n'est disponible sur la puissance du test.

7.2. **Cas asymptotique.** L'approche asymptotique est certainement la plus populaire. Elle s'appuie sur le comportement de la loi de $D_n(u)$ sous $\mathbb{P}_u$ pour n grand. Dans cette perspective, nous sommes amenés à considérer le modèle de taille infinie $\big(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}, \mu^{\otimes \mathbb{N}}\big)_{\mu \in \mathcal{P}}$.

Le théorème de Kolmogorov-Smirnov assure alors :

$$\forall\ t > 0,\ \lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_{\mu_0}\big\{D_n(\mu_0) > t\big\} = 2 \sum_{k=1} (-1)^{k-1} \exp(-2k^2 t^2).$$

La fonction de répartition limite est tabulée (instruction `pks` sous Scilab), de sorte que si c en désigne le quantile d'ordre $1 - \alpha$, pour $0 < \alpha < 1$, nous avons :

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{P}_{\mu_0}\big\{D_n(\mu_0) > c\big\} = \alpha.$$

Par ailleurs, la loi des grands nombres assure que :

$$\forall\ \mu \neq \mu_0,\ \mathbb{P}_\mu\text{-p.s.},\ \lim_{n \to +\infty} D_n(\mu_0) = +\infty.$$

En particulier, le test est convergent. Il s'agit d'un avantage certain en comparaison du cadre non asymptotique.

8. Utilisation du Test de Kolmogorov Smirnov

Nous utiliserons le test asymptotique, en acceptant un 1000-échantillon comme un échantillon "asymptotique". Cette valeur est amplement suffisante pour assurer la validité de la procédure décrite dans le paragraphe précédent. Nous rappelons alors que le 0.95 quantile de la loi de Kolmogorov Smirnov est de l'ordre de 1.36 : il est possible de retrouver cette valeur en appliquant l'instruction `Stixbox pks(0.95)`.

Rappelons que nous souhaitons comparer la loi de W_{20} conditionnée à prendre des valeurs strictement positives avec la loi μ_0 de densité :

$$t \in \mathbb{R} \mapsto \mathbf{1}_{]0,+\infty[}(t)\frac{1}{3}\exp\left(-\frac{t}{3}\right).$$

Le principe est le suivant :

(1) Simuler un L échantillon suivant la loi de W_{20} conditionnée à prendre des valeurs strictement positives.

(2) Trier cet échantillon par ordre croissant.

(3) Calculer la statistique de test. Pour cela, on pourra remarquer que celle-ci s'écrit sous la forme (en utilisant les notations du paragraphe précédent) :

$$\mathbb{P}\text{−p.s.},\ D_L(\mu_0)(\omega) = L^{1/2} \max_{i=0\ldots L} \max\left(|i/L - \mu_0(]-\infty, X_{(i)}(\omega)])|, |i/L - \mu(]-\infty, X_{(i+1)}(\omega)])|\right),$$

où $(X_{(i)})_{1\leq i\leq L}$ désigne la statistique d'ordre de $(X_1, ..., X_L)$ et avec la convention $X_{(0)}(\omega) = -\infty,\ X_{(L+1)}(\omega) = +\infty$.

(4) Décider si le test accepte le L-échantillon comme un échantillon de loi μ_0.

Exerice 7 : Mettre en place le test de Kolmogorov-Smirnov après avoir calculé la fonction de répartition de la loi μ_0.

9. Annexe

```
/////////////////////////////////////////////////////////////
// Exercice 1
/////////////////////////////////////////////////////////////

// Consulter l'Annexe B, T.P. 7, 2eme Methode

////////////////////////////////////////////////////////////
// Exercice 2
/////////////////////////////////////////////////////////////


// Simulation d'un L Echantillon de W_n
// Premiere Methode
// c parametre de la geometrique

function x=galtonech(c,n,L)
x=[];
for i=1:L,
x=[x,galton(c,n)];
end;
x=(1-c)*c^(-n)*x;
```

```
endfunction

// Deuxieme Methode

function x=galtonech2(c,n,L);

// Simulation du L echantillon de la 1ere generation x=grand(1,L,"nbn",1,c);
// Generation suivantes
for k=2:n,

// Simulation du nombre total de descendants
loc2=[0,cumsum(grand(1,sum(x),"nbn",1,c))];

// Repartition des descendants entre les L simulations
loc3=1+cumsum(x);
x=loc2(loc3) - [0,loc2(loc3([1:L-1]))];
end;
x=(1-c)*c^(-n)*x;
endfunction

// Histogramme
w=galtonech2(.4,20,1000);
histplot(100,w)

// Fonction de repartition empirique
xbasc(0)
plot2d2([1/1000:1/1000:1],w)

////////////////////////////////////////////////////////////
// Exercice 3
// Transformee de Laplace empirique
////////////////////////////////////////////////////////////

g=galtonech(0.4,20,1000);
k=[0:0.01:5]';
h=mean(exp(-k*g),'c');
plot2d(k,h);
xtitle('Representation de la transformee de Laplace empirique de W20');
vspace5pt

////////////////////////////////////////////////////////////
// Exercice 4
// Equation Fonctionnelle
////////////////////////////////////////////////////////////

// Implementation de la fonction generatrice
function gene=gene(c,x)
```

```
// c parametre la la loi geometrique
// x vecteur des points de calcul
gene=c*(1-(1-c)*x).^(-1)
// Remarquer l'ecriture vectorielle
endfunction

// Utilisation
g=galtonech(0.4,20,1000);
k=[0:0.01:5]';
h=mean(exp(-(1.5)^(-20)*k*g),'c');
h1=mean(exp(-(1.5)^(-21)*k*g),'c');
h2=gene(h);
plot2d([k,k],[h1,h2],[1,2],'161','Laplace(1.5*)@Generatrice(Laplace)');
xtitle('Verifiaction empirique de la relation entre fonction generatrice
de X1 et la transformee de Laplace de W20')

////////////////////////////////////////////////////////////
// Exercice 5
////////////////////////////////////////////////////////////


function galton=galtonpos(c,n,L)
x=[];
for i=1:L,
g=galtonech(c,n,1),
// On utilise l'algorithme de conditionnement
while (g==0),
g=galtonech(c,n,1),
end;
x=[x,g];
end;
galton=x;
endfunction

////////////////////////////////////////////////////////////
// Exercice 6. Densite Empirique
////////////////////////////////////////////////////////////

g=galtonpos(0.4,20,1000);
histplot(100,g,[1,1],'161','Histogramme');
plot2d([0:0.01:max(g)],1/3*exp(-1/3*[0:0.01:max(g)]),[2,2],'181',
'Densite limite')

/////////////////////////////////////////////////////
// Exercice 7. Test de KS
/////////////////////////////////////////////////////


function ks=ks(L,g)
```

```
// Tri de l'echantillon g et composition par la fonction de repartition
g=1-exp(-1/3*gsort(g,'c','i'));
// Valeurs extremes
maxim=[g(1),1-g(L)];
// Calcul des autres valeurs
for i=1:(L-1),
maxim=[maxim,abs(i/L- g(i)),abs(i/L-g(i+1))];
end;
ks=L^(1/2)*max(maxim);
endfunction

//Application de ks
ks(1000,galtonpos(0.4,20,1000))
```

10. Annexe B - Preuve du Théorème 3

Dans un souci de simplicité, nous désignons par φ_n la fonction génératrice de X_n et par ψ_n la transformée de Laplace de W_n. Alors, nous affirmons que :

$$\forall\ s \geq 0,\ \psi_n(s) = \mathbb{E}\big(\exp(-sW_n)\big) = \mathbb{E}\big(\exp(-\frac{s}{m^n}X_n)\big) = \varphi_n\left(\exp(-\frac{s}{m^n})\right).$$

On en déduit en particulier que pour tout $n \geq 1$:

$$\psi_{n+1}(ms) = \varphi_{n+1}\left(\exp(-\frac{s}{m^n}\right) = \varphi\left(\varphi_n\big(-\frac{s}{m^n})\right) = \varphi\big(\psi_n(s)\big).$$

Or, on sait que la suite $(W_n)_{n\geq 1}$ converge p.s. vers W, et donc en converge également en loi vers W. En particulier,

$$\forall\ s \geq 0,\ \psi_n(s) \to \psi(s).$$

La fonction φ est continue sur $[0,1]$. On en déduit que :

$$\forall\ s \geq 0,\ \psi(ms) = \varphi\big(\psi(s)\big).$$

Le fait que $\mathbb{E}(W) = 1$ assure $\psi'(0) = -1$.

Prouvons maintenant que la loi de W est l'unique loi de moyenne 1 pour laquelle la relation prouvée est vérifiée. Pour cela, considérons une variable Y de moyenne 1 de transformée de Laplace θ telle que :

$$\forall\ s \geq 0,\ \theta\big(ms\big) = \varphi\big(\theta(s)\big).$$

On considère la fonction différence $t \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{\psi(t)-\theta(t)}{t}$. Cette fonction est prolongeable par continuité en 0 car ψ et θ sont différentiables et le prolongement est nul car φ et θ ont même dérivée en 0 (W et Y ont même moyenne).

On en déduit que $\forall\ t \geq 0,\ \psi(t) - \theta(t) = t\gamma(t)$ où γ est une fonction continue valant 0 en 0. Des relations,

$$\forall\ s \geq 0,\ \psi(ms) = \varphi\big(\psi(s)\big),$$
$$\forall\ s \geq 0,\ \theta(ms) = \varphi\big(\theta(s)\big),$$

on déduit que :

$$\forall\ t \geq 0,\ mt\gamma(t) = \varphi\big(\psi(t)\big) - \varphi\big(\theta(t)\big).$$

En remarquant que la fonction génératrice φ est m-lipschitzienne, il vient :

$$\forall\ t \geq 0,\ mt\big|\gamma(mt)\big| \leq mt\big|\gamma(t)\big|.$$

On en déduit que :

$$\forall\, t \geq 0,\ \big|\gamma(mt)\big| \leq \big|\gamma(t)\big|.$$

Et donc par récurrence,

$$\forall\, n \geq 1,\ \forall\, t \geq 0,\ \big|\gamma(t)\big| \leq \big|\gamma(t/m^n)\big|.$$

En faisant tendre n vers l'infini, on en déduit que $\gamma = 0$. W et Y ont même transformée de Laplace et donc même loi.

Finalement,

Corollaire 4 : La probabilité d'extinction est exactement la probabilité $\mathbb{P}\big\{W = 0\big\}$.

Preuve. On sait que pour tout $s \geq 0$, $\psi(s) = \mathbb{E}\big(\exp(-sW)\big)$. En particulier,

$$\lim_{s \to +\infty} \mathbb{E}\big(\exp(-sW)\big) = \mathbb{P}\big\{W = 0\big\}.$$

De la relation $\forall\, s \geq 0,\ \psi(ms) = \varphi\big(\psi(s)\big)$, on déduit que $q = \mathbb{P}\big\{W = 0\big\}$ vérifie l'équation $q = \varphi(q)$. Or, l'équation $x = \varphi(x)$ admet deux solutions (cas $m > 1$), l'une des deux étant 1. Il est clairement impossible d'avoir $q = 1$, puisque $\mathbb{E}(W) = 1$. On en déduit que $a = \mathbb{P}\big\{W = 0\big\}$. $\square$