CORRIGÉ DU DEVOIR MAISON NO 1

RENDRE LES PROGRAMMES SOUS FORME DE FICHIER INFORMATIQUE OU SOUS FORME PAPIER. POUR LES AUTRES QUESTIONS, RENDRE UN DEVOIR PAPIER.

Exercice 1. (1) **(3 points)** Cauchy-Schwarz :

$$\left(\int_1^{+\infty} \exp(-x)dx\right)^2 \leq \left(\int_1^{+\infty} x^2 e^{-x}dx\right)\left(\int_1^{+\infty} x^{-2}e^{-x}dx\right) = C^{-1}\left(\int_1^{+\infty} x^2e^{-x}dx\right).$$

Calculons

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} e^{-x}dx &= e^{-1}, \\ \int_1^{+\infty} x^2e^{-x}dx &= \left[-x^2e^{-x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} 2xe^{-x}dx \\ &= e^{-1} + \left[-2xe^{-x}\right]_1^{+\infty} + \int_1^{+\infty} 2e^{-x}dx \\ &= 5e^{-1}.\end{aligned}$$

Donc $C = 5e \leq 2e^2$ car $5/2 < e$.

(2) **(2 points)** On calcule la fonction de répartition associée à g. Pour $t \geq 1$:

$$G(t) = \int_0^t g(x)dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_0^t = 1 - \frac{1}{t}.$$

(Et $G(t) = 0$ si $t < 1$.) Remarquons que G est continue. On inverse cette fonction : soit $u \in [0;1]$, les lignes suivantes sont équivalentes

$$\begin{aligned} u &= 1 - \frac{1}{t}, \\ \frac{1}{t} &= 1 - u, \\ t &= \frac{1}{1-u}. \end{aligned}$$

Par un théorème du cours, si $U \sim \mathcal{U}([0;1])$, alors $G^{-1}(U) = \frac{1}{1-U}$ est de loi de densité g.

(3) **(4 points)** Pour tout $x \geq 1$, $Cf(x) \leq \frac{Ce^{-1}}{x^2} = Ce^{-1}g(x)$. Cette inégalité est encore vraie pour $x \leq 1$. Les fonctions f et g s'annulent toutes les deux sur $]-\infty;1]$. On peut donc simuler suivant Cf à l'aide d'une méthode de rejet (Ce^{-1} correspondant à la constante k du cours). Remarquons que $\frac{Cf(x)}{Ce^{-1}g(x)} = \frac{e}{e^x} = e^{1-x}$.

Exercice 2. (1) **(2 points)** Par la loi des grands nombres, Z approche $I = \int_{\mathbb{R}} \sqrt{|x|}\frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}dx$.

(2) **(3 points)** Voir programme.

(3) **(2 points)** On essaie la technique de la variable de contrôle. On sait calculer :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x| \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 2 \int_0^{+\infty} x \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx = \sqrt{\frac{2}{\pi}} .$$

Si on tire $X_1, X_2, \dots$ i.i.d. de loi $\mathcal{N}(0,1)$ alors $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left[\sqrt{|X_i|} - |X_i|\right] + \sqrt{\frac{2}{\pi}}$ va approcher I (quand $n \to +\infty$). Voir programme.

(4) **(4 points)** La variance est réduite (d'un facteur 2 environ). Voir programme.