Université de Nice - M1 IMEA - Méthode de Monte-Carlo

DEVOIR MAISON NO 1

RENDRE LES PROGRAMMES SOUS FORME DE FICHIER INFORMATIQUE OU SOUS FORME PAPIER. POUR LES AUTRES QUESTIONS, RENDRE UN DEVOIR PAPIER.

Exercice 1. On définit la fonction

$$f(x) = x^{-2} \exp(-x) \mathbf{1}_{[1,+\infty)}(x).$$

On appelle C la constante positive telle que

$$C \int_{\mathbb{R}} f(x) dx = 1.$$

(1) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\left(\int_1^{+\infty} \exp(-x) dx \right)^2 \leq C^{-1} \int_1^{+\infty} x^2 \exp(-x) dx.$$

En déduire que

$$C \leq 2e^2.$$

(2) Donner une méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition de la loi de densité

$$g(x) = x^{-2} \mathbf{1}_{[1,+\infty)}(x).$$

(3) En déduire un algorithme de simulation de densité $C \times f$ de type rejet fondé sur la comparaison de f et g.

Exercice 2. (1) On s'intéresse à l'algorithme suivant.

Algorithme 1 Boucle de Monte-Carlo

```
n=1000;
s=0;
Pour i de 1 à n :
    Tirer U de loi N(0,1);
    s = s + sqrt(|U|);
Afficher s/N;
```

On note Z le résultat affiché par l'algorithme. Quelle est la quantité I approchée par Z ?

(2) Écrire un programme qui estime la variance de la méthode ci-dessus.

(3) Proposer une méthode de réduction de variance pour le calcul de I.

(4) Écrire un programme qui implémente cette nouvelle méthode. Écrire un programme qui estime la nouvelle variance (elle soit être plus petite que la variance de la question 2).