Université de Nice-Sophia Antipolis
L2 MPIE - Statistiques
Sylvain Rubenthaler http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen (durée 2h)

Documents, calculatrices et téléphones interdits. Les exercices sont indépendants. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses, sauf pour les questions où il est demandé de ne pas écrire de justification. Les exercices sont indépendants.

1. (a) On calcule $F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ pour tout $t\in\mathbb{R}$. Si $t\leq 0$, $F(t)=0$. Si $0\leq t\leq 1$,

$$F(t)=\int_0^t \frac{3}{2}x^2dx=\left[\frac{x^3}{2}\right]_0^t=\frac{t^3}{2}\,.$$

Si $1\leq t\leq 2$,

$$F(t)=\int_0^1 \frac{3x^2}{2}dx+\int_1^t \frac{3}{2}(x-2)^2dx=\frac{1}{2}+\left[\frac{(x-2)^3}{2}\right]_1^t=1+\frac{(t-2)^3}{2}\,.$$

Si $t\geq 2$,

$$F(t)=\int_0^1 \frac{3x^2}{2}dx+\int_1^2 \frac{3(x-2)^2}{2}dx=1\,.$$

Donc

$$F(t)=\begin{cases}0 & \text{si } t\leq 0\,,\\ \frac{t^3}{2} & \text{si } 0\leq t\leq 1\,,\\ \frac{1}{2}+\frac{(t-2)^3}{2} & \text{si 1≤t≤2}\,,\\ 1 & \text{si } 2\leq t\,.\end{cases}$$

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx\\ &= \int_0^1 \frac{3x^3}{2}dx+\int_1^2\frac{3x(x-2)^2}{2}dx\\ &= \left[\frac{3x^4}{8}\right]_0^1+\int_1^2\frac{3(x-2)^3}{2}+3(x-2)^2dx\\ &= \frac{3}{8}+\left[\frac{3(x-2)^4}{8}+(x-2)^3\right]_1^2\\ &= \frac{3}{8}-\frac{3}{8}+1=1\,.\end{aligned}$$

(On peut aussi remarquer que la densité est symétrique par rapport à 1.)

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \int_0^1\frac{3x^4}{2}dx+\int_1^2\frac{3x^2(x-2)^2}{2}dx\\ &= \left[\frac{3x^5}{10}\right]_0^1+\int_1^2\frac{3}{2}((x-2)^4-4(x-2)^2+4x(x-2)^2)dx\\ &= \frac{3}{10}+\left[\frac{3}{10}(x-2)^5\right]_1^2-\left[2(x-2)^3\right]_1^2+4\int_1^2\frac{3}{2}x(x-2)^2dx\\ \text{(par (b))} &= \frac{3}{10}+\frac{3}{10}-2+4\left(1-\frac{3}{8}\right)=1,1\,.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{V}(X)=1,1-1^2=0,1$.

2. (a) Nous avons $\mathbb{P}(T=1)=\mathbb{P}(X_1=1)=1/3$. Pour $n\geq 2$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T=n) &= \mathbb{P}(X_1=0,\dots,X_{n-1}=0,X_n=1)\\ \text{(par indépendance des } X_i) &= \mathbb{P}(X_1=0)\mathbb{P}(X_2=0)\dots\mathbb{P}(X_{n-1}=0)\mathbb{P}(X_n=1)\\ &= (2/3)^{n-1}(1/3).\end{aligned}$$

Donc $\forall n\geq 1$, $\mathbb{P}(T=n)=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\frac{1}{3}$.

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(T\geq 3) &= \sum_{k=3}^{+\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\frac{1}{3}\\ &= \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2\frac{1}{1-\frac{2}{3}}\\ &= \frac{4}{27}\times\frac{3}{1}=\frac{4}{9}.\end{aligned}$$

3. (a) La variable $\widehat{\theta}_n$ est une fonction de $X_1,X_2,\dots,X_n$.

(b) Par la loi des grands nombres $\frac{X_1^2+\dots+X_n^2}{n}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}}\mathbb{E}(X_1^2)$. Calculons :

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1^2) &= \int_0^{+\infty}x^2\theta e^{-\theta x}dx\\ &= \left[-x^2e^{-\theta x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2xe^{-\theta x}dx\\ &= 0+\left[-2x\frac{e^{-\theta x}}{\theta}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}2\frac{e^{-\theta x}}{\theta}dx\\ &= 0-\left[2\frac{e^{-\theta x}}{\theta^2}\right]_0^{+\infty}=\frac{2}{\theta^2}.\end{aligned}$$

Donc $\widehat{\theta}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}}\theta$. Donc $\widehat{\theta}_n\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{proba.}}\theta$. Donc $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ.

(c)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \int_0^{+\infty}x\theta e^{-\theta x}dx\\ &= \left[-xe^{-\theta x}\right]_0^{+\infty}+\int_0^{+\infty}e^{-\theta x}dx\\ &= 0+\left[-\frac{e^{-\theta x}}{\theta}\right]_0^{+\infty}\\ &= \frac{1}{\theta}.\end{aligned}$$

Donc $\mathbb{V}(X_1)=\frac{2}{\theta^2}-\frac{1}{\theta^2}=\frac{1}{\theta^2}$.

(d) La variable $\frac{1}{\widehat{\theta}_n^2}$ est bien une fonction de $X_1,\dots,X_n$. Nous avons $\frac{1}{\widehat{\theta}_n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}}\frac{1}{\theta^2}$. Donc $\frac{1}{\widehat{\theta}_n^2}\xrightarrow[n\to+\infty]{\text{proba.}}\frac{1}{\theta^2}$. Donc $\frac{1}{\widehat{\theta}_n^2}$ est un estimateur convergent de $\mathbb{V}(X_1)$.

4. (a)

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X_1) &= \int_0^1 udu\\ &= \left[\frac{u^2}{2}\right]_0^1=\frac{1}{2}.\end{aligned}$$

(b)

$$\mathbb{E}(X_1^2) = \int_0^1 u^2 du = \left[\frac{u^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3}$$

donc $\mathbb{V}(X_1) = \frac{1}{3} - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}$.

(c)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{64} \geq 32 + \frac{4}{\sqrt{3}}) &= \mathbb{P}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{64}}{64} \geq \frac{1}{2} + \frac{4}{64\sqrt{3}}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{(1/12)}}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{64}}{64} - \frac{1}{2}\right) \geq \frac{4}{64\sqrt{3}} \times \sqrt{64} \times 2\sqrt{3}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{64}}{\sqrt{(1/12)}}\left(\frac{X_1 + \cdots + X_{64}}{64} - \frac{1}{2}\right) \geq 1\right)
\end{aligned}$$

Par le théorème central-limite,

$$\mathbb{P}(X_1 + \cdots + X_{64} \geq 32 + \frac{4}{\sqrt{3}}) \approx \mathbb{P}(Z \geq 1)$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$. On lit sur la table que cette probabilité vaut $1 - 0,8413 = 0,1587$.

5. (a)

$$f(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(X_i - \mu)^2\right)$$

(b) $\log(f(X_1, \ldots, X_n; \mu) = \sum_{i=1}^{n} -\frac{1}{2}(X_i - \mu)^2 - n\log(\sqrt{2\pi})$

(c) On calcule la dérivée par rapport à μ :

$$\frac{\partial}{\partial\mu}\log(f(X_1, \ldots, X_n; \mu) = -\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)\,.$$

Notons $g(\mu) = \log\left(f(X_1, \ldots, X_n; \mu)\right)$, $\overline{X}_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}$.

μ	$-\infty$		$\overline{X}_n$		$+\infty$
$g'(\mu)$		$+$	0	$-$	
$g(\mu)$		$\nearrow$		$\searrow$	

TABLE 1 – Tableau de variation

Donc $\overline{X}_n$ est un maximum de g, c'est donc l'estimateur du maximum de vraisemblance.

6. (a)

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \leq t) &= \mathbb{P}(X_1 \leq t, \ldots, X_n \leq t) \\
\text{(par indépendance des } X_i\text{)} &= \prod_{i=1}^{n} \mathbb{P}(X_i \leq t)
\end{aligned}$$

Nous avons $\mathbb{P}(X_1 \leq t) = \int_{-\infty}^{t} f(x)dx$ et donc

$$\mathbb{P}(X_1 \leq t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\,, \\ 1 - e^{-t} & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$

Donc $\mathbb{P}(Y \leq t) = (1 - e^{-t})^n$.

(b) Notons g la densité cherchée. Nous avons :

$$g(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leq 0\,, \\ ne^{-t}(1 - e^{-t})^{n-1} & \text{si } t \geq 0\,. \end{cases}$$