Université de Nice-Sophia Antipolis
L2 MPIE - Statistiques
Sylvain Rubenthaler http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Examen (durée 2h)

Documents, calculatrices et téléphones interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

1. (a) Soit f une densité de probabilité donnée par

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 0\,, \\ \frac{3}{2}x^2 & \text{si } x \in [0;1]\,, \\ \frac{3}{2}(x-2)^2 & \text{si } x \in [1;2]\,, \\ 0 & \text{si } x \geq 2\,. \end{cases}$$

   Calculer la fonction de répartition F associée.

   (b) Soit X de densité f. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

   (c) Calculer $\mathbb{V}(X)$ (on pourra utiliser l'identité : $x^2(x-2)^2 = (x-2)^4 - 4(x-2)^2 + 4x(x-2)^2$).

2. Soient $X_1, X_2, \dots$ des tirages indépendants de loi $\mathcal{B}(1/3)$ (Bernoulli de paramètre $1/3$). Soit $T = \inf\{n \geq 1 : X_n = 1\}$.

   (a) Soit $n \geq 1$, calculer $\mathbb{P}(T = n)$.

   (b) Calculer $\mathbb{P}(T \geq 3)$.

3. On se donne une densité f de loi exponentielle de paramètre θ ($\theta > 0$). Soient $X_1, X_2, \dots$ indépendants, tous de même loi de densité f. On cherche à estimer θ. Pour $n \geq 1$, on note $\widehat{\theta}_n = \sqrt{\frac{2n}{X_1^2 + \dots + X_n^2}}$.

   (a) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur de θ.

   (b) Montrer que $\widehat{\theta}_n$ est un estimateur convergent de θ (on pourra utiliser l'intégration par parties).

   (c) Calculer $\mathbb{V}(X_1)$ (on pourra utiliser l'intégration par parties).

   (d) Montrer que $\left(\widehat{\theta}_n\right)^{-2}$ est un estimateur de $\mathbb{V}(X_1)$, et qu'il est convergent.

4. Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables aléatoires indépendantes, toute de loi uniforme sur $[0;1]$.

   (a) Calculer $\mathbb{E}(X_1)$.

   (b) Calculer $\mathbb{V}(X_1)$.

   (c) Donner une estimation de $\mathbb{P}(X_1 + \dots + X_{64} \geq 32 + \frac{4}{\sqrt{3}})$.

5. Soit X une variable gaussienne de moyenne μ et de variance 1. Soit $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ un n-échantillon de X.

   (a) Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(X_1, \dots, X_n; \mu)$ associée au n-uplet $(X_1, \dots, X_n)$.

   (b) Écrire le log (népérien) de la vraisemblance précédente.

   (c) Quel est l'estimateur du maximum de vraisemblance de μ ?

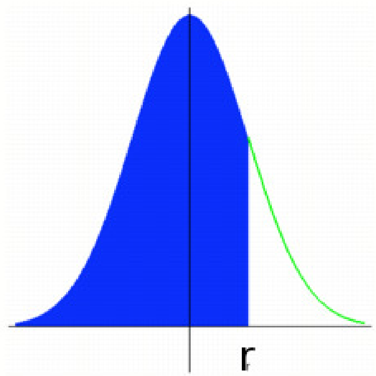
6. On se donne une densité f de loi exponentielle de paramètre 1. Soient $X_1, X_2, \dots$ indépendants, tous de même loi de densité f. On fixe $n \geq 1$.

   (a) Soit $Y = \sup_{1 \leq k \leq n} X_k$. Calculer $\mathbb{P}(Y \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

   (b) Calculer la densité de Y (rappel : c'est l'opposé de la dérivée de la fonction de répartition aux points où on peut la calculer).

Table de la loi normale

$$P(X \leq r) \; avec \; X \sim N(\mathbf{0{,}1})$$



	0	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986