UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 1 IMEA, Méthodes de Monte-Carlo, 2012-2013
Sylvain Rubenthaler
http ://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Corrigé de l'examen (du lundi 3 juin 2013)
Durée : 3h.
Documents, téléphones et calculatrices interdits.
La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Aucune importance n'a été accordée aux erreurs de syntaxe de scilab.

1. (a)

Algorithme 1

```
k=0;
b=0;
while (b==0) do
  b=grand(1,1,'bin',1,p);
  k=k+1;
end,
disp(k);
```

(b)

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X>k) &= \sum_{i=k+1}^{+\infty} p(1-p)i-1 \\ &= p(1-p)^k \times \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^k\,.\end{aligned}$$

(c) Calculons la fonction de répartition de X. Nous avons, pour $k\in\mathbb{N}^*$, $F_X(k)=\mathbb{P}(X\leq k)=1-(1-p)^k$. Si $U\sim\mathcal{U}([0;1])$ alors $F_X^{-1}(U)$ est de même loi que X. Soit $k\in\mathbb{N}^*$, les lignes suivantes sont équivalentes :

$$1-(1-p)^{k-1} < U \leq 1-(1-p)^k\,,$$
$$k\log(1-p) \leq \log(1-U) < (k-1)\log(1-p)\,,$$
$$(k-1) < \frac{\log(1-U)}{\log(1-p)} \leq k\,,$$
$$k = \left\lceil \frac{\log(1-U)}{\log(1-p)} \right\rceil\,.$$

Donc $F_x^{-1}(U)=\left\lceil \frac{\log(1-U)}{\log(1-p)}\right\rceil$. L'algorithme est donc le suivant.

Algorithme 2

```
u=grand(1,1,'unf',0,1);
x=ceil(log(1-u)/log(1-p));
disp(x);
```

(d) Pour le premier programme, le nombre de boucles est de même loi que X. Nous avons : $\mathbb{E}(X) = \sum_{k=1}^{+\infty} pk(1-p)^{k-1} = pf'(1-p)$ avec $f(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Donc $\mathbb{E}(X) = \frac{p}{(1-(1-p))^2} = \frac{1}{p}$. Le deuxième programme ne comporte pas de boucle. Donc le deuxième programme est plus efficace.

2. Prenons deux fonctions test f, g. Calculons :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(X_1)g(Y)) &= \int_{\mathbb{R}^3} \mu(dx_0)Q(x_0, dx_1)\frac{e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f(x_1)g(y)dx_0dx_1dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx_0)Q(x_0, dx_1)\frac{e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f(x_1)dx_0dx_1\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu(du_0)Q(u_0, du_1)\frac{e^{-\frac{(y-u_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du_0du_1\right)} \\
&\quad \times \left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu(du_0)Q(u_0, du_1)\frac{e^{-\frac{(y-u_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du_0du_1\right) dy\,.
\end{aligned}$$

Posons $\psi(y) = \int_{\mathbb{R}^2} \mu(du_0)Q(u_0, du_1)\frac{e^{-\frac{(y-u_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du_0du_1$. Nous remarquons que ψ est la densité de Y. Donc

$$\mathbb{E}(f(X_1)g(Y)) = \int_{\mathbb{R}} g(y)\frac{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx_0)Q(x_0, dx_1)\frac{e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f(x_1)dx_0dx_1\right)}{\left(\int_{\mathbb{R}^2} \mu(du_0)Q(u_0, du_1)\frac{e^{-\frac{(y-u_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du_0du_1\right)}\psi(y)dy\,.$$

Donc

$$\mathbb{E}(f(X_1)|Y=y) = \frac{\int_{\mathbb{R}^2} \mu(dx_0)Q(x_0, dx_1)\frac{e^{-\frac{(y-x_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} f(x_1)dx_0dx_1}{\int_{\mathbb{R}^2} \mu(du_0)Q(u_0, du_1)\frac{e^{-\frac{(y-u_1)^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}} du_0du_1}\,.$$

3. Nous avons $\sum_{x\in A} f(x)\lambda(x) \leq \max_{x\in E} f(x) \times \sum_{x\in A}\lambda(x)$ et $\sum_{y\in E} f(x)\lambda(x) \geq \min_{x\in E} f(x)\times \sum_{y\in E}\lambda(x) = \min_{x\in E} f(x)$. D'où le résultat.

4. Le programme tire $X \sim \mathcal{U}([-2;2])$ et $U \sim \mathcal{U}([0;1])$ indépendantes jusqu'à ce que $\frac{U}{4}\times\frac{8}{3} \leq \mathbb{1}_{[-1;1]}(X)\frac{2\sqrt{1-X^2}}{\pi}$. Remarquons que nous avons l'inégalité suivante :

$$\forall t\in\mathbb{R}\,,\ \mathbb{1}_{[-1;1](t)}\frac{2\sqrt{1-t^2}}{\pi} \leq \frac{\mathbb{1}_{[-2;2]}(t)}{4}\times\frac{8}{3}$$

(car $\frac{2}{\pi} \leq \frac{2}{3}$). On identifie donc un algorithme de rejet. La variable simulée est de loi de densité $t\in\mathbb{R}\mapsto \mathbb{1}_{[-1;1](t)}\frac{2\sqrt{1-t^2}}{\pi}$.

5. Notons S_1, S_2, ... les valeurs successives prises par S au cours du programme. Notons T le nombre de boucles. la deuxième variable affichée par le programme est $T-1$. Nous avons : $T = \inf\{k\geq 1 : S_k \geq 2\}$. Les variables $X_1 = S_1$, $X_2 = S_2 - S_1$, $X_3 = S_3 - S_2$, ... sont i.i.d. de loi $\mathcal{E}(1)$. La variable T est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. Soit $k\geq 2$, calculons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(T=k) &= \int_{0\leq x_1\leq 2}\int_{0\leq x_2\leq 2-x_1}\dots\int_{0\leq x_{k-1}\leq 2-\dots-x_{k-2}}\int_{2-\dots-x_{k-1}\leq x_k} e^{-x_1}\dots e^{-x_k}dx_1\dots dx_k \\
&= \int_{0\leq x_1\leq 2}\int_{0\leq x_2\leq 2-x_1}\dots\int_{0\leq x_{k-1}\leq 2-\dots-x_{k-2}} e^{-x_1}\dots e^{-x_{k-1}}e^{-(2-x_1-\dots-x_{k-1})}dx_1\dots dx_{k-1} \\
&= \int_{0\leq x_1\leq 2}\int_{0\leq x_2\leq 2-x_1}\dots\int_{0\leq x_{k-2}\leq 2-\dots-x_{k-3}} e^{-2}(2-x_1-\dots-x_{k-2})dx_1\dots dx_{k-2} \\
\text{(récurrence)} &= e^{-2}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!}\,.
\end{aligned}$$

Par ailleurs : $\mathbb{P}(T=1)=e^{-2}$. On remarque donc que $T-1 \sim \mathcal{P}(2)$.
La première variable affichée est S_T-2. Calculons pour une fonction test f :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f(S_T-2)) &= \mathbb{E}(\sum_{k=1}^{+\infty} f(X_1+\dots+X_k)\mathbb{1}_{T=k}) \\
&= \int_2^{+\infty} f(x_1-2)e^{-x_1}dx_1 \\
&\quad + \sum_{k\geq 2}\int_{0\leq x_1\leq 2}\int_{0\leq x_2\leq 2-x_1}\dots \\
&\quad \dots\int_{0\leq x_{k-1}\leq 2-\dots-x_{k-2}}\int_{2-\dots-x_{k-1}} f(x_1+\dots+x_k-2)e^{-x_1}\dots e^{-x_k}dx_1\dots dx_k \\
&= \int_2^{+\infty} f(x_1)e^{-x_1}dx_1 \\
(u=x_1+\dots+x_k) &\quad + \sum_{k\geq 2}\int_{0\leq x_1\leq 2}\int_{0\leq x_2\leq 2-x_1}\dots\int_{0\leq x_{k-1}\leq 2-\dots-x_{k-2}}\left(\int_{2\leq u} f(2-u)e^{-u}du\right)dx_1\dots dx_{k-1} \\
&= \left(\int_{2\leq u} f(2-u)e^{-u}du\right)\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-2}\frac{2^{k-1}}{(k-1)!} \\
&= \int_{2\leq u} f(2-u)e^{-u}du\,.
\end{aligned}$$

Donc $S_T-2\sim\mathcal{E}(2)$.

6. (a) Si $x,y\in E$, il existe un chemin $x_1,\dots,x_n$ tel que $x\sim x_1$, $x_1\sim x_2$, ... , $x_n\sim y$. Donc $Q(x,x_1)\dots Q(x_n,y)\neq 0$. Donc Q est irréductible.

   (b) Si on est en x et que l'on propose y avec le noyau Q, la probabilité d'accepter le mouvement en y est (d'après le cours) :

$$\inf\left(1,\frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right)\,.$$

   La transition de la chaîne de Metropolis s'écrit donc

$$M(x,y) = \begin{cases} Q(x,y)\inf\left(1,\frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right) & \text{si } y\neq x\,, \\ 1-\sum_{z\neq x}Q(x,z)\inf\left(1,\frac{\pi(z)Q(z,x)}{\pi(x)Q(x,z)}\right) & \text{si } y=x\,. \end{cases}$$

   Montrons que π est réversible par rapport à M (ce qui implique qu'elle est invariante par M). Si $y\neq x$,

$$\begin{aligned}
\pi(x)M(x,y) &= \pi(x)Q(x,y)\inf\left(1,\frac{\pi(y)Q(y,x)}{\pi(x)Q(x,y)}\right) \\
&= \inf(\pi(x)Q(x,y),\pi(y)Q(y,x)) \\
&= \pi(y)M(y,x)
\end{aligned}$$