UNIVERSITÉ DE NICE - SOPHIA ANTIPOLIS
Master 1 IMEA, Méthodes de Monte-Carlo, 2012-2013
Sylvain Rubenthaler
http ://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Examen - lundi 3 juin 2013
Durée : 3h.
Documents, téléphones et calculatrices interdits.
La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses.
Aucune importance ne sera accordée aux erreurs de syntaxe de scilab.
Les exercices sont indépendants.

1. Soit X une variable aléatoire géométrique de paramètre $p \in]0;1[$ ($\mathbb{P}(X=k) = p(1-p)^{k-1}$, $k \geq 1$).
   (a) Écrire un programme qui simule X à l'aide de tirages de variables de Bernoulli (il n'est pas nécessaire de démontrer que le résultat de l'algorithme est correct).
   (b) Calculer $\mathbb{P}(X > k)$ pour $k \in \mathbb{N}^*$.
   (c) Écrire un programme simulant X et basé sur la formule de la question précédente (montrer que le résultat de l'algorithme est correct).
   (d) Calculer le nombre moyen de boucles dans chacun des programmes ci-dessus. Comparer l'efficacité des deux programmes.
2. Soit X_0 de loi μ sur $\mathbb{R}$. Soit Q un noyau de Markov sur $\mathbb{R}$. Soit $X_1 \sim Q(X_0, .)$. On se donne $\epsilon \sim \mathcal{N}(0,1)$ indépendante de X_0, X_1. Soit $Y = X_1 + \epsilon$. On suppose que l'on a observé $Y = y$. Donner la loi de X_1 sachant $Y = y$ en fonction des paramètres de l'énoncé (on demande de refaire une démonstration du cours).
3. Soit E un ensemble fini. Soit $f : E \to \mathbb{R}^+ \backslash \{0\}$. Soit λ une loi de probabilité sur E. On s'intéresse à μ la loi de probabilité sur E donnée par : $\forall A \subset E$,
$$\mu(A) = \frac{\sum_{x \in A} f(x)\lambda(x)}{\sum_{y \in E} f(y)\lambda(y)} .$$
   Montrer que $\forall A \subset E$,
$$\mu(A) \leq \frac{\max_{x \in E} f(x)}{\min_{x \in E} f(x)} \times \lambda(A) .$$
4. Calculer la densité de la variable affichée par le programme ci-dessous.

Algorithme 1

```
b=0;
while (b==0) do
  x=grand(1,1,'unf',-2,2); //simule une loi uniforme sur [−2;2]
  if abs(x)<1 then //abs renvoie la valeur absolue
    u=grand(1,1,'unf',0,1); //simule une loi uniforme sur [0;1]
    if (u*0.25*(8/3)<2*sqrt(1-x^2)/%pi) then
//sqrt renvoie la racine carrée et %pi=π
      b=1;
    end,
  end,
end,
disp(x);//disp est l'instruction pour afficher
```

5. (a) Quelle est la loi de la deuxième variable aléatoire affichée par l'algorithme ci-dessous (on demande de refaire une démonstration du cours) ?
   (b) Quelle est la loi de la première variable aléatoire affichée par l'algorithme ci-dessous ?

Algorithme 2

```
s=0;
k=-1;
while (s<2)
  s=s+grand(1,1,'exp',1); //ici, grand (...) renvoie une variable de loi
exponentielle de paramètre 1
  k=k+1;
end,
disp(s-2);
disp(k);
```

6. Soit $E = \{1, \ldots, N\}^2$ (pour un certain $N \in \mathbb{N}^*$). Si (a, b), (c, d) sont dans E, on dit qu'ils sont voisins et on note $(a, b) \sim (c, d)$ si $|a - c| + |b - d| = 1$. On se donne le noyau de Markov suivant sur E :

$$Q(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{\#\{z \in E, z \sim x\}} & \text{si } y \sim x\,, \\ 0 & \text{sinon}\,. \end{cases}$$

   (a) Montrer que Q est irréductible sur E.
   (b) On cherche une transition de Metropolis de loi invariante π, la loi uniforme sur E. Donner l'expression d'une telle transition basée sur Q (c'est à dire que l'on propose avec le noyau Q). Montrer que π est bien invariante par la transition proposée. (On demande de refaire des démonstrations du cours.)