Université de Nice-Sophia Antipolis
L2 MPIE - Statistiques
Sylvain Rubenthaler `http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Exemple de partiel, I

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Vous écrirez vos calculs et vos réponses dans les encadrés. Les exercices sont indépendants.

1. Soit $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Soit $\alpha \in]0;1[$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{0,1,2,\dots,k\}$ tel que $\mathbb{P}(X=0) = 1-\alpha$, $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=2) = \dots = \mathbb{P}(X=k)$.

   (a) Trouver $\mathbb{P}(X=1)$.

   $\mathbb{P}(X=0) + k\,\mathbb{P}(X=1)$
   donc $\mathbb{P}(X=1) = \frac{\alpha}{k}$

   (b) Calculer l'espérance de X.

   $\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^{k} i \frac{\alpha}{k} = \frac{\alpha}{k} \frac{k(k+1)}{2} = \frac{\alpha(k+1)}{2}$

   (c) Déterminer (sans démonstration) la fonction de répartition de X pour les paramètres suivants : $\alpha = 1/2$, $k = 2$. (Attention, ici, on ne demande que la réponse).

   $$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ = \frac{1}{2} & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ = \frac{3}{4} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ = \frac{1}{4} & \text{si } 2 \leq x \end{cases}$$

2. On lance un dé de manière répétitive jusqu'à obtenir un 6. Notons $X_1, X_2, \dots$ les résultats des lancers successifs ($X_1, X_2, \dots$ sont bien sûr indépendants). Soit $N = \inf\{n \geq 1 : X_n = 6\}$ (l'instant du premier 6).

   (a) Quelle est la loi de N ?

   Soit $n \in \mathbb{N}^*$. $\mathbb{P}(N=n) = \mathbb{P}(X_1 \neq 6, \dots, X_{n-1} \neq 6, X_n = 6)$
   par indépendance
   $= \mathbb{P}(X_1 \neq 6) \dots \mathbb{P}(X_{n-1} \neq 6) \times \mathbb{P}(X_n = 6)$
   $= \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \left(\frac{1}{6}\right)$

   (b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ fixé. Calculer $\mathbb{P}(1 \leq N \leq 10)$.

   $\mathbb{P}(1 \leq N \leq 10) = \sum_{i=1}^{10} \left(\frac{5}{6}\right)^{i-1} \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{11}}{\left(1-\frac{5}{6}\right)}$

3. Soit X une variable de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Calculer $\mathbb{E}(X)$.

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!} \times k$$
$$= \lambda \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!} = \lambda$$

4. Soit f la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} \frac{3}{4} + \alpha x & \text{si } x \in [-1;0] \\ \frac{3}{4} - \alpha x & \text{si } x \in [0;1] \\ 0 & \text{ailleurs}. \end{cases}$$

(a) Trouver un α tel que f soit une fonction de densité.

$$\int_{-1}^{0} \frac{3}{4} + \alpha x \, dx = \left[\frac{3}{4}x + \frac{\alpha x^2}{2}\right]_{-1}^{0} = \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}$$
$$\int_{0}^{1} \frac{3}{4} - \alpha x \, dx = \left[\frac{3}{4}x + \frac{\alpha x^2}{2}\right]_{0}^{1} = \frac{3}{4} - \frac{\alpha}{2}$$

On prend $\alpha = \frac{1}{2}$. On a alors bien $f \geqslant 0$ et d'intégrale 1.

(b) Déterminer (sans démonstration) la fonction de répartition F associée à cette densité. (Attention, ici, on ne demande que la réponse).

$$F(x) \begin{cases} = 0 \text{ si } x < -1 \\ = \frac{3}{4}x + \frac{x^2}{4} + \frac{1}{2} \text{ si } -1 \leq x \leq 0 \\ = \frac{3}{4}x - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2} \text{ si } 0 \leq x \leq 1 \\ = 1 \text{ si } 1 \leq x \end{cases}$$

(c) Calculer $\mathbb{E}(X)$, où X est une variable aléatoire de densité f.

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-1}^{0} \frac{3}{4}x^2 + \frac{x}{4} \, dx + \int_{0}^{1} \frac{3}{4}x^2 - \frac{x}{4} \, dx$$
$$= \left[\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{8}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{x^3}{4} - \frac{x^2}{8}\right]_{0}^{1}$$
$$= \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} = \frac{3}{4}$$