TD1 : Variables aléatoires discrètes

Exo 1

1. $X \sim \mathcal{B}(6, \frac{1}{2})$ c'est à dire $\left| \begin{array}{l} X(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\} \\ \forall i \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X = i) = \dfrac{C_6^i}{2^6} \end{array} \right.$

$Y \sim \mathcal{P}(4)$ c'est à dire $\left| \begin{array}{l} Y(\Omega) = \mathbb{N} \\ \forall i \in Y(\Omega) \quad \mathbb{P}(Y = i) = \dfrac{4^i}{i!} e^{-4} \end{array} \right.$

2. $\mathbb{E}[Y] = 4$ et $\mathbb{V}(Y) = 4$

3. $X = \sum_{i=1}^{6} X_i$ où (X_i) sont des v.a <u>indépendantes</u> de loi $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$

$$\mathbb{E}[X_1] = 0 \times (1 - \frac{1}{2}) + 1 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{E}[X] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{6} X_i\right] = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{E}[X_i] \text{ par linéarité de } \mathbb{E}$$

$$= 6 \times \mathbb{E}[X_1] \text{ car les } (X_i) \text{ ont même loi}$$

$$\boxed{= 3}$$

$$\mathbb{E}[X_1^2] = 0^2 \times (1 - \frac{1}{2}) + 1^2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\mathbb{V}(X_1) = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 = \frac{1}{4}$$

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}\left(\sum_{i=1}^{6} X_i\right) = \sum_{i=1}^{6} \mathbb{V}(X_i) \text{ car } \underline{\underline{\text{les } (X_i) \text{ sont indépendants}}}$$

$$= 6 \times \mathbb{V}(X_1) \text{ car les } (X_i) \text{ ont même loi}$$

$$\boxed{= \frac{3}{2}}$$

4. $\boxed{\mathbb{P}(X>6)=0}$ car $X(\Omega)=\{0,1,2,3,4,5,6\}$

$$\mathbb{P}(1\leq X\leq 4)=\sum_{i=1}^{4}\mathbb{P}(X=i)=\frac{1}{2^6}(6+15+20+15)$$
$$=\boxed{7/8}$$

$$\mathbb{P}(X\geq 2)=1-\mathbb{P}(X<2)=1-(\mathbb{P}(X=0)+\mathbb{P}(X=1))$$
$$=\boxed{\frac{57}{64}}$$

$$\mathbb{P}(Y\leq 2)=\mathbb{P}(Y=0)+\mathbb{P}(Y=1)+\mathbb{P}(Y=2)$$
$$=e^{-4}\left(1+4+\frac{4^2}{2!}\right)$$
$$=\boxed{13e^{-4}}$$

$$\mathbb{P}(3\leq Y\leq 5)=\mathbb{P}(Y=3)+\mathbb{P}(Y=4)+\mathbb{P}(Y=5)$$
$$=\boxed{e^{-4}\left(\frac{4^3}{3!}+\frac{4^4}{4!}+\frac{4^5}{5!}\right)}$$

Exo 2

1. D'après le cours, $\mathbb{E}[X]=\lambda$
   — l'énoncé, $\mathbb{E}[X]=3$ $\Rightarrow \boxed{\lambda=3}$

2. sans défaut : $\mathbb{P}(X=0)=e^{-3}$

plus de 2 défauts : $\mathbb{P}(X>2)=1-\mathbb{P}(X\leq 2)=\boxed{1-\frac{17}{2}e^{-3}}$

entre 3 et 7 défauts : $\mathbb{P}(3\leq X\leq 7)=\boxed{e^{-3}\left(\frac{3^3}{3!}+\frac{3^4}{4!}+\frac{3^5}{5!}+\frac{3^6}{6!}+\frac{3^7}{7!}\right)}$

Exo 3

1. **Rappel** : X suit une loi de probabilité ssi
$$\begin{cases} (1) \ \forall i \in X(\Omega) \quad \mathbb{P}(X=i) \in [0,1] \\ (2) \ \displaystyle\sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i) = 1 \end{cases}$$

En pratique, on commence par vérifier (2). Ensuite, il suffit de montrer que $\forall i \in X(\Omega) \ \mathbb{P}(X=i) \geq 0$ pour démontrer (1).

En effet, $\left.\begin{array}{l} \displaystyle\sum_{i \in X(\Omega)} \mathbb{P}(X=i) = 1 \\ \forall i \in X(\Omega) \ \mathbb{P}(X=i) \geq 0 \end{array}\right| \Rightarrow \mathbb{P}(X=i) \leq 1 \quad \forall i \in X(\Omega)$

Par condition nécessaire, on doit choisir a tel que
$$\sum_{i=1}^{10a} \mathbb{P}(X=i) = 1 \iff 10a\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{10}\right) = 1$$
$$\iff a = 9$$

De plus, pour $a = 9$; $\mathbb{P}(X=i) = \frac{1}{9} - \frac{1}{10} = \frac{1}{90} \geq 0 \ \forall i \in \{1, .., 90\}$

Donc X suit une loi de probabilité ssi $a = 9$.

2. **Méthode 1** : calcul direct $\left(\underline{\text{aide}} : \displaystyle\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}\right)$

Méthode 2 : on remarque que X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, .., 90\}$, et on utilise les résultats du cours.

$$\mathbb{E}[X] = \frac{90+1}{2} = \frac{91}{2}$$

$$\mathbb{V}(X) = \frac{90^2 - 1}{12} = \frac{8099}{12}$$

3.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{90} & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ \vdots & \\ \frac{i}{90} & \text{si } i \leq x < i+1 \\ \vdots & \\ 1 & \text{si } x \geq 90 \end{cases}$$

Exo 4

1. $\mathbb{P}(X=0) + \mathbb{P}(X=1) + \mathbb{P}(X=2) = p^2 + (1-p)^2 + 2p(1-p)$
$= 1$

De plus, $\forall i \in \{0,1,2\}$ $\mathbb{P}(X=i) \geq 0$ puisque $p \in [0,1]$

Donc X suit bien une loi de probabilité.

<u>rmq:</u> il n'était pas évident a priori que $\mathbb{P}(X=2) \leq 1$.

2.

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ p^2 & \text{si } 0 \leq x < 1 \\ p^2 + (1-p)^2 & \text{si } 1 \leq x < 2 \\ 1 & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$$

3. $\mathbb{E}[X] = 0 \times p^2 + 1 \times (1-p)^2 + 2 \times 2p(1-p)$
$= 1 + 2p - 3p^2$

$\mathbb{E}[X^2] = 0^2 \times p^2 + 1^2 \times (1-p)^2 + 2^2 \times 2p(1-p)$
$= 1 + 6p - 7p^2$

$\mathbb{V}(X) = \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[X]^2 = 2p - 5p^2 + 12p^3 - 9p^4$

<u>Vérification:</u> pour $p = 0$, $X = 1 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 1$ et $\mathbb{V}(X) = 0$

pour $p = 1$, $X = 0 \Rightarrow \mathbb{E}[X] = 0$ et $\mathbb{V}(X) = 0$

4. Méthode naïf : calcul direct

Bonne méthode : exploiter les propriétés élémentaires de l'espérance et la variance

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[2X-3] = 2\,\mathbb{E}[X] - 3 \quad \text{par linéarité de } \mathbb{E}$$
$$= -1 + 4p - 6p^2$$

$$\mathbb{V}(Y) = \mathbb{V}(2X-3) = 2^2\,\mathbb{V}(X) \quad \text{par propriété de } \mathbb{V}$$
$$= 8p - 20p^2 + 48p^3 - 36p^4$$