Feuille de TD n°1
Mme Malot
Variables aléatoires discrètes
Durée : 1 semaine

Remarque 1

En raison de la diversité des parcours au sein de la filière, cette feuille et toutes les suivantes seront organisées de la façon suivante :

- *Une première partie sera commune à tous.*
- *Une seconde partie sera spécifique aux étudiants ayant 3h de TD par semaine.*

1 Partie commune

Exercice 1 :

Soit X une variable aléatoire de loi Binomiale $\mathcal{B}(6, 1/2)$ et Y une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(4)$.

1. Pour chacune des deux variables aléatoires, rappeler la loi de probabilité associée.
2. Pour la variable aléatoire Y donner l'espérance et la variance associées.
3. Pour la variable aléatoire X redémontrer les formules de cours donnant l'espérance et la variance.
4. Calculer la probabilité des événements suivants :

$$"X > 6", \quad "1 \leq X \leq 4", \quad "X \geq 2", \quad "Y \leq 2", \quad "3 \leq Y \leq 5"$$

Exercice 2 :

On admet que le nombre de défauts X sur le verre d'une ampoule obéit à une loi de Poisson de paramètre λ.

1. sachant que le nombre moyen de défaut sur le verre d'une ampoule est de 3, quelle est la valeur du paramètre λ?
2. Calculer alors les probabilités suivantes :
   - l'ampoule est sans défaut.

- il y a plus de deux défauts sur l'ampoule.
- il y a entre trois et sept défauts sur l'ampoule.

Exercice 3 :
Soit $a \in \mathbb{N}$ avec $a > 0$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\{1, 2, \dots, 10a\}$ telle que, pour tout k dans cet ensemble,
$$P(X = k) = \frac{1}{a} - \frac{1}{10}$$

1. Trouver a afin que X suive bien une loi de probabilité.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Déterminer la fonction de répartition de X.

Exercice 4 :
Soit X la variable aléatoire définie par
$$P(X = 1) = (1 - p)^2, \quad P(X = 2) = 2p(1 - p), \quad P(X = 0) = p^2$$
où p est un paramètre réel satisfaisant $0 \leq p \leq 1$.

1. Vérifier qu'ainsi on a bien défini une loi de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition de X.
3. Calculer l'espérance et la variance de X.
4. On pose $Y = 2X - 3$. Quelles sont l'espérance et la variance de Y?

2 Partie spécifique

Exercice 1 :
Une famille de dauphins est composée de 6 femelles et 4 mâles. On choisit au hasard, dans cette famille, un groupe de 4 dauphins. Soit Y la variable aléatoire représentant le nombre de femelles que l'on peut observer dans ce groupe. Déterminer la loi de probabilité, la fonction de répartition et l'espérance de Y.

Exercice 2 :
On jette deux dés non pipés. Soit X la variable aléatoire représentant le plus grand des deux chiffres obtenus.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la fonction F_X de X.
3. Représenter graphiquement F_X.
4. Calculer son espérance et sa variance.
5. Calculer la probabilité des événements suivants :
$$"X \geq 6", \quad "X \leq 4", \quad "2 \leq X \leq 3".$$

Exercice 3 :
On tire une carte dans un jeu de 32 cartes. Soit X la variable aléatoire associant à la carte tirée sa valeur selon la règle suivante : 4 pour un as, 3 pour un roi, 2 pour une dame, 1 pour un valet et 0 pour toute autre carte.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Déterminer la fonction F_X de X.
3. Représenter graphiquement F_X.
4. Calculer la probabilité de l'événement "$X \leq 2$".
5. Calculer l'espérance et la variance de X.
6. On pose $Y = -X$. Quelles sont l'espérance et la variance de Y?

Exercice 4 :
Vous participez à un jeu où vous avez la probabilité p de remporter une partie. Si vous gagnez deux parties consécutives, le jeu s'arrête et vous emportez un gain de $40 - 4N$ euros, N étant le nombre de parties jouées. Le nombre maximum de parties jouées est fixé à quatre et vous donnerez à votre adversaire dans ce jeu la somme de 25 euros en cas de perte. Ce jeu vous paraît-il équitable?

Exercice 5 :
La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{1*2} & \text{si } 1 < x \leq 2 \\ 1 - \frac{1}{2*3} & \text{si } 2 < x \leq 3 \\ \dots & \dots \\ 1 - \frac{1}{n*(n+1)} & \text{si } n < x \leq n+1 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

1. Représenter F.
2. Calculer les probabilités $p_n = P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$ et $\mathbb{V}(X)$.

Exercice 6 :
La fonction de répartition F d'une variable aléatoire X est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 1 \\ 1 - \frac{1}{1*2} & \text{si } 1 \geq x < 2 \\ 1 - \frac{1}{2*3} & \text{si } 2 \geqslant x < 3 \\ \dots & \dots \\ 1 - \frac{1}{n*(n+1)} & \text{si } n \geq x < n+1 \\ \dots & \dots \end{cases}$$

1. Représenter F.
2. Calculer les probabilités $p_n = P(X = n)$, $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Calculer $\mathbb{E}(X)$.
4. Quelle différence avec l'exercice précédent?