
Feuille de TD n°2
Variables aléatoires discrètes

Exercice 1 :
Une urne contient une boule blanche et une boule noire.

1. On effectue des tirages avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule blanche. Déterminer la loi de probabilité associée au nombre de tirage N.
2. A présent, après chaque tirage d'une boule noire, on ajoute dans l'urne une boule noire. Déterminer la loi de probabilité associée au nombre de tirages N. Puis, calculer pour $n \in \mathbb{N}^*$ $P(N > n)$ et $\mathbb{E}(N)$.

Exercice 2 :
Au casino, un joueur décide de miser sur un même numéro jusqu'à ce qu'il gagne. Sa mise initiale est $a > 0$ et après chaque partie perdue, il double sa mise. La probabilité pour que le numéro qu'il joue sorte, pour chaque partie, est p et il rapporte k fois la mise ($k \in \mathbb{N}^*$).
Calculer l'espérance mathématique du gain G de ce joueur.

Exercice 3 :
On considère un jeu traditionel de 32 cartes.
On effectue l'expérience suivante : on tire une carte au hasard et on est déclarant gagnant si la carte tirée est une figure (Roi, Dame, Valet) et perdant sinon.

1. On suppose que l'on effectue 4 parties successives avec remise à chaque fois de la carte tirée.
   On note N la variable aléatoire égale au nombre de parties gagnées.
   (a) Quelle est la loi de N? Bien justifier votre réponse.
   (b) Que vaut son espérance puis sa variance?
   (c) Déterminer la fonction de répartition associée.
   (d) Caculer $P(1 \leq N \leq 3)$.

Exercice 4 :
Soit X une variable aléatoire dont la loi de probabilité est définie par :

$$X(\Omega) = \{1, 2, \dots, 10\} \qquad \text{et} \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, 10\},\ P(X = i) = a(i - 2)$$

1. Déterminer a de façon à avoir une loi de probabilité.

2. Calculer l'espérance et la variance.
3. Déterminer la fonction de répartition.
4. Calculer la probabilité $P(3 \leq X \leq 7)$.

Exercice 5 :
Soit X la variable définie de la manière suivante : on répète de manières indépendantes et successives des épreuves de Bernoulli identiques de paramètre p (avec $p \in [0,1]$) jusqu'à la survenue du premier succès. On donne alors à X la valeur égale au nombre d'épreuves réalisées jusqu'à l'obtention de ce premier succès.

1. Déterminer la loi de probabilité de X.
2. Calculer son espérance.
3. Calculer sa variance.

Exercice 6 :
La force de persuasion d'un démarcheur en assurance-vie se traduit par la probabilité p qu'après s'être présenté au domicile de quelqu'un, cette personne souscrive au contrat proposé.
Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire N représentant le nombre de visites nécessaires à la souscription de n contrats ($n \in \mathbb{N}^*$).

Exercice 7 :
Des articles produits en série contiennent en moyenne 2% d'articles défectueux. A chaque heure, un échantillon de 50 articles est prélevé et on arrête la production si l'on trouve plus de 2 articles défectueux. Quelle est la probabilité que la production soit arrêtée avec ce plan d'échantillonnage?

Exercice 8 :
Soit X une variable aléatoire de loi binomiale de paramètres n et θ.

1. Montrer que si l'on considère la variable $Y = n - X$, Y suit une loi binomiale de paramètres n et $1 - \theta$.
2. Soit $b(x; n, \theta) = \binom{n}{x}\theta^x(1-\theta)^{n-x}$ et $Prob(\theta, n, x) = \sum_{i=0}^{x} b(i; n, \theta)$. Montrer que :
   (a) $b(x; n, 1-\theta) = b(n-x; n, \theta)$
   (b) $Prob(1-\theta, n, x) = 1 - Prob(\theta, n, n-x-1)$

Exercice 9 :
Le nombre de pannes X d'un appareil pendant une période de t heures est une variable de Poisson de moyenne $0.8t$. Une compagnie fait la location de l'appareil à 400 euros de l'heure et le répare au coût de $100X^2$ euros.

1. Montrer que $\mathbb{E}(X^2) = 0.8t + 0.64t^2$.
2. Exprimer le profit moyen pour une période de t heures en fonction de t.
3. Pour quelle valeur de t ce profit est-il maximum et que vaut-il?