

---

## Feuille de TD n°3 Variables aléatoires continues

### Exercice 1 :

Soit  $X$  une variable aléatoire dont la fonction de densité est donnée par :

$$f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [0, 1] \\ 2 - x & \text{si } x \in [1, 2] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Déterminer la fonction de répartition  $F$  de  $X$ . Tracer son graphe ainsi que celui de  $f$ .
2. Déterminer la médiane de  $X$ .
3. Calculer son espérance et sa variance.
4. Calculer  $P(|X - 1| < 1/2)$ .

### Exercice 2 :

On considère une variable aléatoire  $X$  réelle dont la densité de probabilité est définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \lambda x^{-2} & \text{si } x \in [1, 10] \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

1. Pour quelle valeur de  $K$  la fonction  $f$  est bien une densité de probabilité?
2. Déterminer l'espérance et la variance.
3. Déterminer la fonction de répartition.
4. Calculer  $P(X > 3)$  et  $P(X > 2)$ .

### Exercice 3 :

Soit  $X$  une variable aléatoire réelle dont la fonction de répartition est donnée par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < -2 \\ \frac{1}{4} * a * x + b & \text{si } -2 < x < -1 \\ c * x + \frac{2}{3} & \text{si } -1 < x < 2 \\ 1 & \text{si } 2 < x \end{cases}$$

1. Déterminer  $a$ ,  $b$  et  $c$  pour que  $F$  soit bien une fonction de répartition.
2. Calculer  $P(-3/2 < X < 0)$ .
3. Déterminer la médiane et l'espérance de  $X$ .

**Exercice 4 :**

1. Le temps, mesuré en heures, nécessaire pour réparer une certaine machine suit la loi exponentielle de paramètre  $\lambda = 1/2$ .
  - (a) Quelle est la probabilité que le temps de réparation excède deux heures?
  - (b) Calculer le temps moyen d'attente.
2. Soit  $T$  une variable de loi exponentielle de paramètre  $\lambda > 0$ .
  - (a) Trouver le paramètre  $\lambda$  de cette loi sachant que  $P(T \leq 70) = 0.05$ .
  - (b) Déduisez-en  $P(T > 30)$ .

**Exercice 5 :**

On considère la fonction  $f$  définie par :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{-x}{\theta} - 1/2 & \text{si } -\theta < x \leq -\theta/2 \\ \frac{x}{\theta} - 1/2 & \text{si } \theta/2 < x \leq \theta \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}$$

où  $\theta$  est un réel positif.

1. Déterminer  $\theta$  pour que  $f$  soit une fonction de densité.
2. Déterminer la fonction de répartition  $F$  associée à cette densité.
3. Calculer  $\mathbb{E}(X)$  et  $\mathbb{V}(X)$ , où  $X$  est une variable aléatoire de densité  $f$ .

**Exercice 6 :**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Calculer les probabilités suivantes :

$$P(0 < X < 1), \quad P(-1 < X < 1), \quad P(-2 < X < 1), \quad P(-0.7 < X < -0.3), \\ P(1 < X < 2).$$

**Exercice 7 :**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale d'espérance  $-2$  et de variance  $4$ .

Calculer les probabilités suivantes :

$$P(0 < X < 1), \quad P(0 < X < 0.5), \quad P(-1 < X < 1), \quad P(-2 < X < -1), \\ P(-0.7 < X < -0.3), \quad P(1 < X < 2).$$

**Exercice 8 :**

Soit  $X$  une variable aléatoire de loi normale centrée réduite.

Calculer pour chacune des probabilités ci-après, la valeur du paramètre  $a$  :

$$P(0 < X < a) = 95\%, \quad P(-a < X < a) = 96\%, \quad P(a < X) = 5\%, \quad P(a < |X|) = 2\%.$$

**Exercice 9 :**

Dans une rivière, 2% des poissons sont rouges. On pêche 150 poissons. Calculer la probabilité de prendre plus de 3 poissons rouges.