Université de Nice-Sophia Antipolis
L2 MPIE - Probabilités - 2012-2013

Corrigé du partiel no 2 (durée 1h15)

Documents, calculatrices et téléphones interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1. 1. On décide de numéroter les cartes de 1 à 52, les 4 premières cartes étant les rois. Soit donc $\Omega = \mathcal{P}_4(\{1,\dots,52\})$. La mesure de probabilité sur Ω est la suivante : $\forall \omega \in \Omega$, $\mathbb{P}(\{\omega\}) = \frac{1}{\#\Omega} = \frac{1}{C_{52}^4}$.

2. Soit $A = \{\omega \in \Omega : \#(\omega \cap \{1,2,3,4\}) = 2\}$. Nous avons

$$\mathbb{P}(A) = \frac{\#\omega}{\#\Omega} = \frac{C_4^2 C_{48}^2}{C_{52}^4} = \frac{2^4.3^3.47}{13.51.5^2.7^2}.$$

Exercice 2. La variable X est à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ et $\forall k \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{P}(X=k) = (1-p)^{k-1}p$.

1. Si $t \geq 1$, $\mathbb{P}(X \leq t) = \sum_{k=1}^{\lfloor t \rfloor}(1-p)^{k-1}p = 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor}$. Donc

$$F(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 1, \\ 1-(1-p)^{\lfloor t \rfloor} & \text{si } t \geq 1\,. \end{cases}$$

2. Si $t \in [0;1[$ et $n \in \mathbb{N}^*$ sont tels que $1-(1-p)^n \leq t < 1-(1-p)^{n+1}$. Ces deux inégalités sont équivalentes à

$$\log(1-t) \leq n\log(1-p) \quad \text{et} \quad (n+1)\log(1-p) < \log(1-t)\,,$$

c'est à dire

$$n \leq \frac{\log(1-t)}{\log(1-p)} < n+1\,,$$

c'est à dire

$$n = \left\lfloor \frac{\log(1-t)}{\log(1-p)} \right\rfloor\,.$$

3. La variable $F(X)$ est à valeurs dans $[0;1[$. Soit $t \in [0;1[$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $1-(1-p)^n \leq t < 1-(1-p)^{n+1}$. Par la question précédente : $n = \left\lfloor \frac{\log(1-t)}{\log(1-p)} \right\rfloor$. Donc $\mathbb{P}(F(X) \leq t) = \mathbb{P}(X \leq n) = 1-(1-p)^n$. La fonction de répartition F_Y de Y est donc

$$F_Y(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ 1 & \text{si } t \geq 1, \\ 1-(1-p)^{\left\lfloor \frac{\log(1-t)}{\log(1-p)} \right\rfloor} & \text{si } t \in [0;1[\,. \end{cases}$$

Exercice 3. 1. Notons X à valeurs dans $\{O, A\}$ la variable aléatoire « métal de la pièce ». Notons U à valeurs dans $\{1,2,3\}$ la variable aléatoire « numéro de l'urne choisie ». Nous savons que $\mathbb{P}(X=O|U=1) = 4/12$, $\mathbb{P}(X=O|U=2) = 3/12$, $\mathbb{P}(X=O|U=3) = 6/12$, $\mathbb{P}(U=i) = 1/3$ pour tout $i \in \{1,2,3\}$. Calculons (en utilisant la formule des probabilités totales)

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X=O) &= \mathbb{P}(X=O|U=1)\mathbb{P}(U=1) + \mathbb{P}(X=O|U=2)\mathbb{P}(U=2) + \mathbb{P}(X=O|U=3) \\ &= \frac{1}{3}\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\frac{1}{3} + \frac{1}{2}\frac{1}{3} \\ &= \frac{4+3+6}{36} = \frac{13}{36}. \end{aligned}$$

2. Calculons

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(U=1|X=O) &= \frac{\mathbb{P}(X=O|U=1)\mathbb{P}(U=1)}{\mathbb{P}(X=O)} \\ &= \frac{\left(\frac{4}{12}\cdot\frac{1}{3}\right)}{\left(\frac{13}{36}\right)} = \frac{4}{13}\,.\end{aligned}$$