Université de Nice-Sophia Antipolis
L2 MPIE - Statistiques
Sylvain Rubenthaler http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html

Exemple de partiel, II

Durée : 1h. Documents, calculatrices et téléphones interdits. Vous écrirez vos calculs et vos réponses dans les encadrés. Les exercices sont indépendants.

1. On compte le nombre de noisettes dans les nids d'écureuil avant l'hiver. Voici les résultats sous forme de tableau.

Nombre de noisettes (k)	10	11	12	16	20
Nombre de nids avec k noisettes	5	3	4	2	1

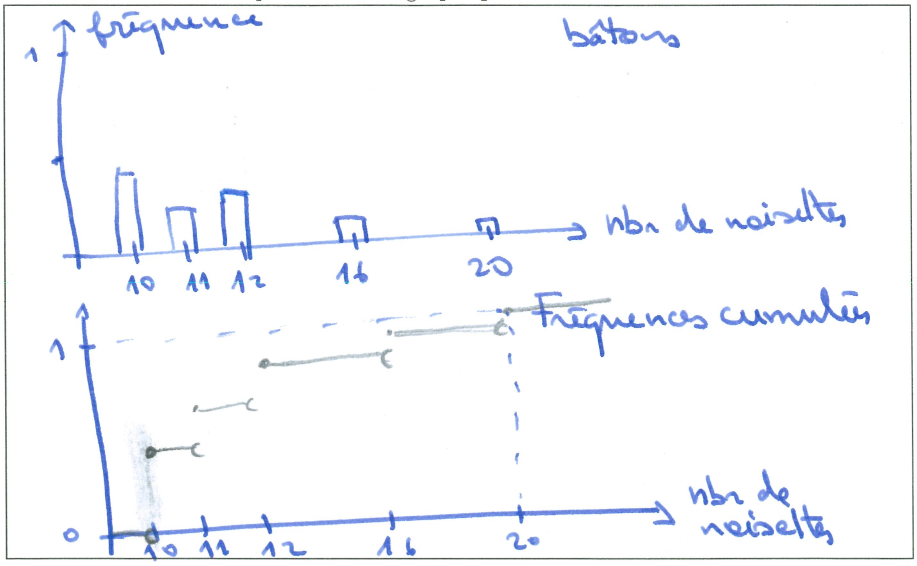
(a) Identifier la variable et donner sa nature.

Variable : nombre de noisettes.
Nature : quantitative discrète.

(b) Construire le tableau de répartition.

Nombre de noisettes	Effectif	Fréquence	Fréquence cumulée
10	5	5/15	5/15
11	3	3/15	8/15
12	4	4/15	12/15
16	2	2/15	14/15
20	1	1/15	15/15

(c) Construire toutes les représentations graphiques illustrant cette distribution.



(d) Calculer toutes les mesures de tendance centrales pertinentes.

$\bar{x} = \frac{10\times5+11\times3+12\times4+16\times2+20}{15} = \frac{183}{15}$

$M_d = 1$

mode $= 10$

(e) Déterminer Q_3. $Q_3 = 12$

2. Soit X une variable aléatoire continue telle que $\mathbb{E}(X) = 0$, $\mathbb{E}(X^2) = 1$, $\mathbb{E}(X^4) = 1$. Que peut-on dire de l'étalement de la distribution de X ?

$CA(X) = \frac{1}{1} - 3 = -2$

donc la distribution de X est plus aplatie que la gaussienne

3. On observe des réalisations de variables X, Y où Y dépend de X.

X	1	2	3	4
Y	2	1	3	5

Calculer l'équation de la droite de régression de Y en fonction de X (on pourra laisser les résultats sous forme de fraction rationnelle.

$\bar{x} = \frac{1+2+3+4}{4} = \frac{10}{4}$; $\bar{y} = \frac{2+2+3+5}{4} = \frac{11}{4}$

$\sum x_i^2 = 1+4+9+16 = 27$

$b = \frac{31 - 4\times\frac{10}{4}\times\frac{11}{4}}{27 - 4\times\left(\frac{10}{4}\right)^2} = \frac{31-2{,}5\times11}{27-12{,}5} = \frac{2{,}5}{14{,}5} = \frac{5}{29}$

$a = \bar{y} - b\bar{x} = \frac{10}{4} - \frac{11}{4}\times\frac{5}{29} = \frac{290-55}{4\times29}$

$= \frac{235}{4\times29} = \frac{235}{112}$

4. On note $X_1, X_2, \ldots$ les résultats successifs d'un jeu de pile ou face (les X_i sont indépendants et $X_i = 0$ ou 1 avec probabilité $1/2$).

(a) Préciser vers quoi tend $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ quand n tend vers l'infini, et dans quel sens.

$\frac{X_1+\dots+X_n}{n} \xrightarrow[(n\to\infty)]{} E(X) = \frac{1}{2}$ presque sûrement (par la loi des grands nombres)

(b) Préciser vers quoi tend $\sqrt{n}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{2}\right)$ quand n tend vers l'infini, et dans quel sens.

$\sqrt{n}\left(\frac{X_1+\dots+X_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \xrightarrow[(n\to\infty)]{\text{loi}} Z$ de loi $\mathcal{N}(0, Var(X))$ par le théorème central-limite

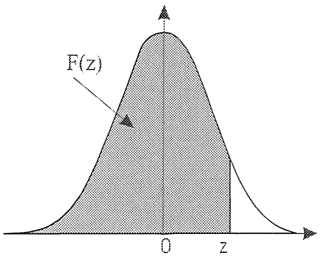
(c) Donner une estimation de $\mathbb{P}\left(\sqrt{n}\left(\frac{X_1+\cdots+X_n}{n} - \frac{1}{2}\right) \geq 1\right)$ pour $n = 16$.

$\mathbb{P}(\dots) = \mathbb{P}(Z \geqslant 1) = \mathbb{P}\left(\frac{Z}{(1/2)} \geqslant 2\right) = 1 - 0,9772 = 0,0228$
$(Var(X) = \frac{1}{4})$ $\quad \sim \mathcal{N}(0,1)$ $\quad$ voir table

Il y aura aussi des exercices du type de ceux que vous avez eu au partiel 1. Je vous engage donc à en refaire pour vous entrainer.

Fonction de répartition de la loi normale centrée réduite

(probabilité F(z) de trouver une valeur inférieure à z)



z	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09
0,0	0,5000	0,5040	0,5080	0,5120	0,5160	0,5199	0,5239	0,5279	0,5319	0,5359
0,1	0,5398	0,5438	0,5478	0,5517	0,5557	0,5596	0,5636	0,5675	0,5714	0,5753
0,2	0,5793	0,5832	0,5871	0,5910	0,5948	0,5987	0,6026	0,6064	0,6103	0,6141
0,3	0,6179	0,6217	0,6255	0,6293	0,6331	0,6368	0,6406	0,6443	0,6480	0,6517
0,4	0,6554	0,6591	0,6628	0,6664	0,6700	0,6736	0,6772	0,6808	0,6844	0,6879
0,5	0,6915	0,6950	0,6985	0,7019	0,7054	0,7088	0,7123	0,7157	0,7190	0,7224
0,6	0,7257	0,7291	0,7324	0,7357	0,7389	0,7422	0,7454	0,7486	0,7517	0,7549
0,7	0,7580	0,7611	0,7642	0,7673	0,7704	0,7734	0,7764	0,7794	0,7823	0,7852
0,8	0,7881	0,7910	0,7939	0,7967	0,7995	0,8023	0,8051	0,8078	0,8106	0,8133
0,9	0,8159	0,8186	0,8212	0,8238	0,8264	0,8289	0,8315	0,8340	0,8365	0,8389
1,0	0,8413	0,8438	0,8461	0,8485	0,8508	0,8531	0,8554	0,8577	0,8599	0,8621
1,1	0,8643	0,8665	0,8686	0,8708	0,8729	0,8749	0,8770	0,8790	0,8810	0,8830
1,2	0,8849	0,8869	0,8888	0,8907	0,8925	0,8944	0,8962	0,8980	0,8997	0,9015
1,3	0,9032	0,9049	0,9066	0,9082	0,9099	0,9115	0,9131	0,9147	0,9162	0,9177
1,4	0,9192	0,9207	0,9222	0,9236	0,9251	0,9265	0,9279	0,9292	0,9306	0,9319
1,5	0,9332	0,9345	0,9357	0,9370	0,9382	0,9394	0,9406	0,9418	0,9429	0,9441
1,6	0,9452	0,9463	0,9474	0,9484	0,9495	0,9505	0,9515	0,9525	0,9535	0,9545
1,7	0,9554	0,9564	0,9573	0,9582	0,9591	0,9599	0,9608	0,9616	0,9625	0,9633
1,8	0,9641	0,9649	0,9656	0,9664	0,9671	0,9678	0,9686	0,9693	0,9699	0,9706
1,9	0,9713	0,9719	0,9726	0,9732	0,9738	0,9744	0,9750	0,9756	0,9761	0,9767
2,0	0,9772	0,9778	0,9783	0,9788	0,9793	0,9798	0,9803	0,9808	0,9812	0,9817
2,1	0,9821	0,9826	0,9830	0,9834	0,9838	0,9842	0,9846	0,9850	0,9854	0,9857
2,2	0,9861	0,9864	0,9868	0,9871	0,9875	0,9878	0,9881	0,9884	0,9887	0,9890
2,3	0,9893	0,9896	0,9898	0,9901	0,9904	0,9906	0,9909	0,9911	0,9913	0,9916
2,4	0,9918	0,9920	0,9922	0,9925	0,9927	0,9929	0,9931	0,9932	0,9934	0,9936
2,5	0,9938	0,9940	0,9941	0,9943	0,9945	0,9946	0,9948	0,9949	0,9951	0,9952
2,6	0,9953	0,9955	0,9956	0,9957	0,9959	0,9960	0,9961	0,9962	0,9963	0,9964
2,7	0,9965	0,9966	0,9967	0,9968	0,9969	0,9970	0,9971	0,9972	0,9973	0,9974
2,8	0,9974	0,9975	0,9976	0,9977	0,9977	0,9978	0,9979	0,9979	0,9980	0,9981
2,9	0,9981	0,9982	0,9982	0,9983	0,9984	0,9984	0,9985	0,9985	0,9986	0,9986

Table pour les grandes valeurs de z

z	3,0	3,1	3,2	3,3	3,4	3,5	3,6	3,7	3,8	3,9
F(z)	0,998650	0,999032	0,999313	0,999517	0,999663	0,999767	0,999841	0,999892	0,999928	0,999952

z	4,0	4,1	4,2	4,3	4,4	4,5	4,6	4,7	4,8	4,9
F(z)	0,999968	0,999979	0,999987	0,999991	0,999995	0,999997	0,999998	0,999999	0,999999	1,000000

Nota. La table donne F(z) pour z positif. Pour z négatif, il faut prendre le complément à l'unité de la valeur lue dans la table. Exemple : F(-1,37) = 1 - F(1,37) =1 - 0,9147 = 0,0853.