Université de Nice-Sophia Antipolis
L2 MPIE - Probabilités - 2012-2013

Correction ex. 16

On suppose que l'on a n événements indépendants $A_1, \dots, A_n$. Montrons que $A_1^c, \dots, A_n^c$.
Il faut montrer que $\forall p \in \{1, \dots, n\}$, $\forall \{i_1, \dots, i_p\} \subset \{1, \dots, n\}$,

$$\mathbb{P}((A_{i_1})^c \cap \dots \cap (A_{i_p})^c) = \prod_{k=1}^{p} \mathbb{P}((A_{i_k})^c)\,.$$

Nous allons le montrer pour $\{i_1, \dots, i_p\} = \{1, \dots, n\}$ (la démonstration est la même dans les autres cas). Nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(A_1^c \cap \dots \cap A_n^c) &= 1 - \mathbb{P}(A_1 \cup \dots \cup A_n) \\
&= 1 - [\sum_{k=1}^{n} \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, \# I = k} (-1)^{k+1} \mathbb{P}(\cap_{i \in I} A_i)] \\
\text{(car les } A_i \text{ sont ind.)} &= 1 - [\sum_{k=1}^{n} \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, \# I = k} (-1)^{k+1} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)]\,.
\end{aligned}$$

Par ailleurs :

$$\begin{aligned}
\prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(A_k^c) &= \prod_{k=1}^{n} (1 - \mathbb{P}(A_k)) \\
&= \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \sum_{I \subset \{1,\dots,n\}, \# I = k} \prod_{i \in I} \mathbb{P}(A_i)\,.
\end{aligned}$$

On voit que ces deux expressions sont égales.