Université de Nice - L2 - Probabilités

FEUILLE DE TD NUMÉRO 1

DÉNOMBREMENT - PROBABILITÉS FINIES

1. Dénombrement

Dans chacun des exercices qui suivent, on essaiera d'expliquer la démarche de dénombrement de façon aussi rigoureuse que possible.

Exercice 1. Etant donnés deux entiers n et k positifs, $k \leq n-1$, montrer la relation du triangle de Pascal (on essaiera de donner deux preuves différentes) :

$$C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}.$$

Que peut-on dire si $k = n$?

Pour $k \leq n$, montrer la relation d'absorption

$$kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}.$$

En déduire la valeur de

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k.$$

Exercice 2. Etant donnés deux entiers $n \geq 1$ et $0 \leq k \leq n$, vérifier que $C_n^k = C_n^{n-k}$. En déduire, par un raisonnement de pur dénombrement, que

$$\sum_{k=0}^{n} (C_n^k)^2 = C_{2n}^n.$$

Exercice 3. Soient a et b deux réels et n un entier supérieur à 2. En écrivant (par exemple par récurrence)

$$(a+b)^n = \sum_{(i_1,\dots,i_n)\in\{0,1\}^n} \prod_{j=1}^{n} \varepsilon_{i_j}, \quad \varepsilon_0 = a,\ \varepsilon_1 = b,$$

retrouver le binôme de Newton.

Exercice 4. Les nouvelles plaques minéralogiques comptent exactement 4 lettres et 3 chiffres. En comptant les éventuelles combinaisons exclues, donner le nombre de plaques possibles.

Comparer ce résultat au système des anciennes plaques, comptant 2 lettres et 6 chiffres.

Exercice 5. Combient de successions de lettres peut-on former à partir du mot REVER?

Exercice 6. L'équipe de football d'un grand club européen compte (par ordre alphbétique) 1 Brésilien, 2 Espagnols, 2 Français, 4 Italiens et 2 Ivoiriens. En supposant que la feuille de match, numérotée de 1 à 11, ne mentionne que les nationalités des joueurs, donner le nombre de feuilles de match possibles.

Exercice 7. De combien de façon peut-on ranger p boules (indiscernables) dans n cases numérotées ? (Avec $p \leq n$.)

2. Calcul de probabilités

Dans chacun des exercices qui suivent, on prendra un grand soin à modéliser l'expérience considérée à l'aide d'un espace de probabilité, dont on précisera la mesure de probabilité.

Exercice 8. Quelle est la probabilité qu'en jetant six dés équilibrés et discernables (par exemple par la couleur), toutes les faces exhibent un chiffre différent ?

Exercice 9. Quelles sont les probabilités que, parmi les familles de n enfants, $n \geq 2$, une famille soit constituée d'enfants des deux sexes (événement A), puis des garçons et d'au plus une fille (événement B). Calculer la probabilité de $A \cap B$.

Exercice 10. Une urne contient M jetons numérotés de 1 à M. On tire successivement n en jetons en remettant chaque fois le jeton tiré et en brassant bien. Donner la probabilité qu'aucun jeton ne soit tiré plus d'une fois.

Application : un groupe de n étudiants sont réunis dans une même salle. Quelle est la probabilité qu'au moins deux étudiants aient leur anniversaire le même jour. (On suppose qu'aucun n'est né le 29 février et que n est inférieur à 365.)

Exercice 11. Des tickets au nombre de M sont édités et numérotés de 1 à M. Pour simplifier, on suppose que les n premiers (avec $2n \leq M$) sont gagnants. (Naturellement, les acheteurs ne le savent pas.) Quelle est la probabilité qu'un acheteur de n billets achète au moins un billet gagnant ?

Exercice 12. Etant donné un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$, montrer que $\mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$ si A et B sont deux événements tels que $A \subset B$.

Exercice 13. Etant donné un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$, montrer pour toute famille $A_1, \dots, A_n$ de n événements que

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) \leq \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i).$$

Exercice 14. Démontrer la formule de Poincaré : étant donnés n événements $A_1, \dots, A_n$ d'un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$,

$$\mathbb{P}\Big(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\Big) = \sum_{\ell=1}^{n} (-1)^{n-\ell} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_\ell \leq n} \mathbb{P}\Big(\bigcap_{j=1}^{\ell} A_{i_j}\Big).$$

Application : un facteur distrait distribue le courrier au hasard dans une rue comptant n numéros. En supposant qu'il dépose exactement une lettre par habitation et que, sur les n distribuées au total, une et une seule soit destinée à une habitation donnée, quelle est la probabilité que personne ne reçoive de lettre lui ayant été explicitement adressée ?

3. Loi de variables aléatoires

Exercice 15. On lance deux dés à 6 faces. Donner la loi de la somme des deux résultats obtenus.

Exercice 16. Etant donnée une variable aléatoire X de loi uniforme sur $\{1, ..., N\}$ (définie sur un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$), donner les lois de $N + 1 - X$ et de X/N.

On suppose $N = 2n$. On construit alors la variable aléatoire

$$\forall \omega \in \Omega,\ Y(\omega) = \lfloor \frac{X(\omega)}{2} \rfloor,$$

où $\lfloor \cdot \rfloor$ désigne la partie entière. Donner la loi de Y.

Exercice 17. Etant donnés un espace de probabilité fini $(\Omega, \mathbb{P})$ et un événement A, donner la loi de la variable aléatoire indicatrice de A

$$\mathbf{1}_A : \omega \in \Omega \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } \omega \in A, \\ 0 & \text{si } \omega \notin A. \end{cases}$$

Exercice 18. On procède à N lancers successifs d'une pièce déséquilibrée de paramètre de succès $0 < p < 1$. Donner la loi du nombre de succès.

Exercice 19. Une urne contient n boules rouges et $N - n$ noires. On tire, sans remise, p boules parmi les N. Donner la loi du nombre de boules rouges tirées.

Exercice 20. On rappelle qu'une variable aléatoire H est dite de loi hypergéométrique de paramètres N, n et r si

$$\mathbb{P}\{H = k\} = \frac{C_n^k C_{N-n}^{r-k}}{C_N^r}, \quad \max(n - N + r, 0) \leq k \leq \min(n, r).$$

Que dire de la limite de $\mathbb{P}\{H = k\}$ lorsque N tend vers l'infini et n/N tend vers $p \in]0, 1[$? (Le paramètre r étant fixé.)

Exercice 21. En considérant l'espace produit $\{0, 1\}^N$, donner une modélisation du lancer de N pièces déséquilibrées de paramètre $p \in (0, 1)$. Donner alors la loi de la variable aléatoire :

$$T : \omega = (\omega_1, \ldots, \omega_N) \in \{0, 1\}^N \mapsto \begin{cases} k & \text{si } \omega_1 = \cdots = \omega_{k-1} = 0 \text{ et } \omega_k = 1, \\ N + 1 & \text{si } \omega_1 = \cdots = \omega_N = 0. \end{cases}$$

Que représente T ?