Université de Nice - M1 IMEA - Méthode de Monte-Carlo
http://math.unice.fr/rubentha/cours.html

FEUILLE 1

LOI DES GRANDS NOMBRES

Exercise 1. Donner au moins deux méthodes différentes d'approximation de l'intégrale

$$I_1 = \int_0^1 \cos(x^3)\exp(-x)dx,$$

à l'aide d'une moyenne empirique impliquant des variables aléatoires de loi connue.

Même question avec

$$I_2 = \int_0^{+\infty} \sin(x^4)\exp(-2x)\exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)dx,$$

et

$$I_3 = \int_0^1 \ln(1+x^2)\exp(-x^2)dx.$$

Exercise 2. Soit $(U_n^1, \dots, U_n^3)_{n\geq 1}$ une famille de v.a. indépendantes et identiquement distribuées de loi uniforme sur $]0,1[$. Donner la limite presque-sûre de

$$n^{-1}\sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{(U_i^1)^2+(U_i^2)^2+(U_i^3)^2<1}.$$

Donner une méthode similaire pour retrouver le volume d'une boule de rayon 2.

Exercise 3. Etant donnée une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ identiquement distribuées et indépendantes, telles que $\mathbb{E}[|X_1|^4] < +\infty$ et $\mathbb{E}(X_1) = 0$, on pose

$$S_n = \sum_{k=1}^n X_k.$$

(1) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{E}\big[S_n^4\big] \leq C\big[n + n^2\big].$$

(2) En utilisant l'inégalité de Markov à l'ordre 4, en déduire qu'il existe une constant $c > 0$ telle que, pour tout $n \geq 1$,

$$\mathbb{P}\big\{|S_n| \geq n^{5/6}\big\} \leq cn^{-4/3}.$$

(3) En utilisant le lemme de Borel-Cantelli, en déduire que, presque-sûrement, $S_n/n \to 0$.

Exercise 4. Etant donnée une fonction f sur le segment $[0,1]$, on définit, pour tout rang $n \geq 1$, la fonction pôlynomiale

$$\mathcal{P}_n(x) = \sum_{k=0}^n \big[C_n^k x^k (1-x)^{n-k} f\big(\frac{k}{n}\big)\big].$$

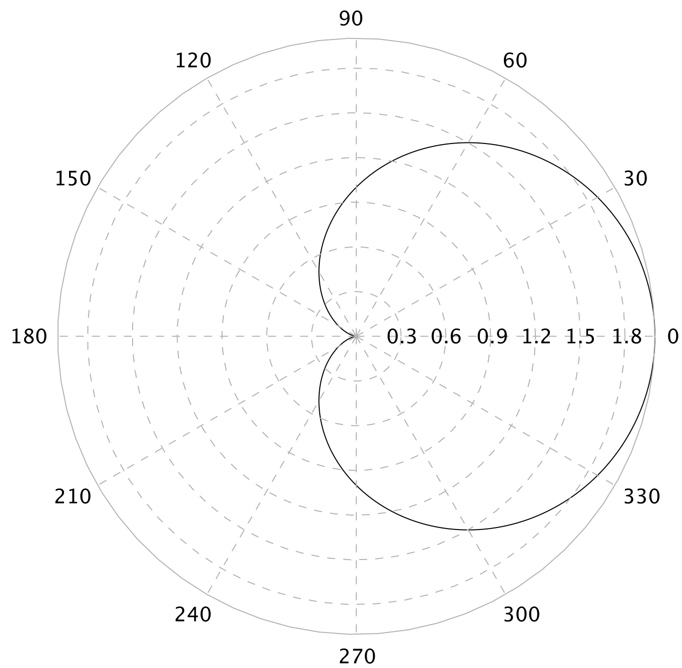
(1) En introduisant, pour tout $x \in [0,1]$, $(\varepsilon_n(x))_{n\geq 1}$, suite de variables aléatoires indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre x, et en posant $S_n(x) = \varepsilon_1(x) + \dots + \varepsilon_n(x)$, interpréter $\mathcal{P}_n(x)$ comme une espérance.

(2) En utilisant l'inégalité de Bienaymé-Chebychev, montrer que

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\{\left|\frac{S_n(x)}{n} - x\right| \geq \varepsilon\} \leq \frac{1}{4n\varepsilon^2}.$$

(3) En déduire que

$$\lim_{n \to +\infty} \sup_{x \in [0,1]} \left|f(x) - \mathcal{P}_n(x)\right| = 0.$$



Exercise 5. La figure ci-dessus représente une cardioide (section de pomme) d'équation $(x^2 + y^2 - x)^2 = (x^2 + y^2)$.

(1) L'intérieur est de la cardioïde est donnée par l'inéquation $(x^2 + y^2 - x)^2 < (x^2 + y^2)$.
En déduire une méthode probabiliste d'approximation de la surface intérieure de la cardioide.

(2) En déduire une méthode probabiliste d'approximation du volume d'une pomme. (Penser à utiliser les volumes de révolution.)

(3) En fait, la cardioïde admet aussi une description paramétrique en coordonées polaires: $\rho = 1 + \cos(\theta)$. En déduire que le volume d'une pomme est $3\pi^2/2$.

Exercise 6. *(Plus difficile.)* Soient $X_1, \ldots, X_n$ des v.a.i.i.d. suivant une loi exponentielle de paramètre 1, de somme notée S_n.

(1) En utilisant le TCL, calculer la limite quand n tend vers l'infini de
$$\mathbb{P}\{a \leq \sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - 1) \leq b\},$$
pour a et b deux réels.

(2) On rappelle que S_n suit une loi $\Gamma(n, 1)$, i.e. a pour densité la fonction
$$x \mapsto \mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x)\frac{x^{n-1}}{\Gamma(n)}\exp(-x),$$
calculer directement la même quantité que ci-dessus.

(3) Retrouver la formule de Stirling
$$n! \sim \sqrt{2\pi n}(\frac{n}{e})^n.$$
(On rappelle que $\Gamma(n) = (n-1)!$.)

Exercise 7.
Soient $X_1, X_2, \dots$ des variables i.i.d uniformes dans $C = [-1;1] \times [-1;1]$. Soit D le disque (dans $\mathbb{R}^2$) de centre $(0,0)$ et de rayon 1.

(1) Calculer par une méthode de Monte-Carlo la valeur de $\mathbb{E}(\mathbf{1}_{X \in D})$.
(2) Estimer la variance de la méthode.
(3) Trouver n un nombre de boucles à effectuer en (1) pour que l'estimation de l'espérance soit précise à 0.1 près avec une probabiblité $\geq 0,05$.

Exercise 8. (1) Simuler des variables exponentielles par la méthode du cours (livre : p. 8).
(2) Tracer un histogramme des variables simuler par cette méthode. Comparer avec un tracé de la densité de la loi exponentielle. (Exemples de programmes dont on pourra s'inspirer : M1 IMEA `http://math1.unice.fr/rubentha/cours.html`.)

Exercise 9. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une chaîne de Markov dans $\mathbb{R}$ de loi initiale μ (de densité que l'on notera μ, par rapport à la mesure de Lebesgue) et de noyau de transition M ($M(x, dy)$ a une densité $M(x, y)$ par rapport à la mesure de Lebesgue). Soient $P \geq 1$, $G_1, \dots, G_P : \mathbb{R} \to]0;1]$. Soit $\pi_{1:P}$ la loi sur $\mathbb{R}^{P+1}$ donnée par son action sur les fonctions tests :
$$\pi_{1:P}(f) = \frac{\mathbb{E}(f(X_0, \dots, X_P)\prod_{i=1}^P G_i(X_i))}{\mathbb{E}(\prod_{i=1}^P G_i(X_i))}.$$

(1) Montrer que la densité de $\pi_{1:P}$ en un point $(x_0, \dots, x_P)$ est proportionnelle à
$$g(x_0, \dots, x_P) := \mu(x_0)\prod_{i=0}^{P-1} M(x_i, x_{i+1})G_{i+1}(x_{i+1})$$
(on notera cette densité également $\pi_{1:P}$).

(2) Montrer que $\forall(x_0, \dots, x_P)$, $\pi_{1:P}(x_0, \dots, x_P) \leq \frac{g(x_0,\dots,x_P)}{Z}$ avec $Z = \mathbb{E}(\prod_{i=1}^P G_i(X_i))$.

(3) Écrire un algorithme de simulation suivant la loi $\pi_{1:P}$ en utilisant une méthode de rejet. Justifier cet algorithme.