FEUILLE 2

MÉTHODE DES TRAPÈZES ET TCL

Exercise 1. Etant donnés un entier $n \geq 1$ et une fonction f continue sur le segment $[0,1]$, nous appelons approximation de rang n de l'intégrale de f sur $[0,1]$ par la méthode des trapèzes la quantité suivante :

$$I_n = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n} \frac{f(k/n) + f((k+1)/n)}{2}.$$

(1) Interpréter I_n sur un graphe. En déduire une justification du nom "méthode des trapèzes".
(2) Montrer, lorsque f est un polynôme de degré inférieur ou égal à 1 que la méthode d'intégration est parfaite, c'est-à-dire que, pour tout $n \geq 1$,

$$I_n = I, \quad \text{avec } I = \int_0^1 f(x)dx.$$

(3) On suppose dans toute la suite de l'énoncé que f est de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[0,1]$. Montrer que pour tout $k \in \{0,\dots,n-1\}$ et tout $x \in [k/n,(k+1)/n]$,

$$\int_{k/n}^{x} f(t)dt = f\big(\frac{k}{n}\big)\big(x - \frac{k}{n}\big) + \int_{k/n}^{x} f'(t)(x-t)dt$$
$$\int_{x}^{(k+1)/n} f(t)dt = f\big(\frac{k+1}{n}\big)\big(\frac{k+1}{n} - x\big) + \int_{x}^{(k+1)/n} f'(t)(x-t)dt$$

(4) En déduire que

$$\int_{k/n}^{(k+1)/n} f(t)dt = \frac{1}{2n}\big[f\big(\frac{k+1}{n}\big) + f\big(\frac{k}{n}\big)\big] + \int_{k/n}^{(k+1)/n} \big[f'(t) - f'\big(\frac{2k+1}{2n}\big)\big]\big(\frac{2k+1}{2n} - t\big)dt$$

(5) Montrer finalement que

$$|I - I_n| \leq \frac{1}{12n^2} \sup_{x\in[0,1]} \big[|f''(x)|\big].$$

Exercise 2. On rappelle que la densité de la loi $\Gamma(p+1,1)$, p entier, est

$$f_p(x) = \frac{1}{p!}x^p \exp(-x)\mathbf{1}_{[0,+\infty)}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On rappelle également que la loi $\Gamma(p+1,1)$ est la loi de la somme de $p+1$ variables aléatoires indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1.

(1) Soit $(X_p)_{p\geq 1}$ une suite de v.a. telles que X_p suive la loi $\Gamma(p+1,1)$, $p \geq 1$. Montrer que

$$Y_p = \frac{X_p - p}{\sqrt{p}} \underset{\text{loi}}{\Rightarrow} \mathcal{N}(0,1),$$

lorsque p tend vers l'infini.

(2) Etant donné un réel x, et p assez grand tel que $p + x\sqrt{p} > 0$, montrer que la densité g_p de Y_p s'écrit au point x :

$$g_p(x) = \frac{p^p \exp(-p)\sqrt{2\pi p}}{p!} r_p(x),$$

où $r_p(x) \to (2\pi)^{-1/2} \exp(-x^2/2)$ lorsque p tend vers l'infini.

(3) En déduire la formule de Stirling :

$$p! \sim_{p\to\infty} \sqrt{2\pi p}\left(\frac{p}{e}\right)^p.$$

Exercise 3. En appliquant le TCL à une suite de v.a. indépendantes de loi de Poisson de paramètre 1, montrer que

$$\lim_{n\to+\infty} \left[\exp(-n) \sum_{k=0}^{n} \frac{n^k}{k!}\right] = \frac{1}{2}.$$