Université de Nice - M1 IMEA - Méthode de Monte-Carlo

FEUILLE 3

TRAVAUX PRATIQUES : SIMULATION PAR REJET

Exercice 1. Montrer que l'algorithme suivant permet de simuler une réalisation de loi uniforme sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

(1) Simuler (U, V) couple de deux v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
(2) Tant que $U^2 + V^2 > 1$, répéter (1).
(3) Renvoyer la valeur de (U, V) en fin de boucle.

Coder l'algorithme en scilab.

Exercice 2. Montrer que l'algorithme suivant permet de simuler une réalisation de loi de densité $x \in \mathbb{R} \mapsto 2\pi^{-1}\sqrt{1-x^2}\mathbf{1}_{[-1,1]}(x)$. (Loi dite de l'Arcsinus.)

(1) Simuler (U, V) couple de deux v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
(2) Tant que $U^2 + V^2 > 1$, répéter (1).
(3) Renvoyer la valeur de U en fin de boucle.

Coder l'algorithme en scilab. Vérifier la méthode à l'aide d'un histogramme.

Exercice 3. Montrer que l'algorithme suivant permet de simuler un couple de v.a.i.i.d. de loi gaussiennes centrées réduites.

(1) Simuler (U, V) couple de deux v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
(2) Tant que $U^2 + V^2 > 1$, répéter (1).
(3) Renvoyer la valeur de (U, V) et de $R^2 = U^2 + V^2$ en fin de boucle.
(4) Poser $Z = [-2\ln(R^2)/R^2]^{1/2}$.
(5) Poser $X = ZU$ et $Y = ZV$.

Coder l'algorithme en scilab. Vérifier à l'aide d'un histogramme que la première variable simulée suit bien une loi gaussienne centrée réduite.

Exercice 4. Soient X et Y deux v.a.i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

(1) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $2Y > (1-X)^2$ a pour densité
$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\exp\big(-\frac{x^2}{2}\big)\mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$
(2) Soit S une v.a. de loi Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante du couple (X, Y). Montrer que la loi conditionnelle de $(2S-1)X$ sachant $2Y > (1-X)^2$ suit une loi normale centrée réduite.
(3) En déduire un algorithme de simulation de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Le coder en scilab.