Université de Nice - L2 - Probabilités

FEUILLE DE TD NUMÉRO 4

1. Espérance

Exercice 1. On considère une variable aléatoire X à valeurs dans $\{1, \dots, 5\}$ de loi

$$\mathbb{P}\{X = 1\} = 1/4,\ \mathbb{P}\{X = 2\} = 1/6,\ \mathbb{P}\{X = 3\} = 1/12,\ \mathbb{P}\{X = 4\} = 1/3,\ \mathbb{P}\{X = 5\} = 1/6.$$

Calculer son espérance.

Exercice 2. Calculer l'espérance d'une loi uniforme sur $\{1, \dots, N\}$, $N \geq 1$.

Exercice 3. Calculer de deux façons l'espérance de la somme des lancers de deux dés à 6 faces :

(1) en utilisant la loi de la somme des deux lancers,

(2) en utilisant la linéarité de l'espérance.

Exercice 4. Calculer de deux façons l'espérance d'une loi binomiale de paramètres $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$:

(1) en utilisant la relation d'absorption $kC_n^k = nC_{n-1}^{k-1}$, $1 \leq k \leq n$,

(2) en écrivant une variable de loi binomiale comme la somme de variables de Bernoulli.

Exercice 5. En utilisant la relation d'absorption rappelée dans l'exercice précédent, calculer l'espérance d'une loi hypergéométrique (N, n, p) avec $0 \leq n \leq N$ et $1 \leq p \leq N$. La comparer à l'espérance d'une binomiale.

Exercice 6. Soit X une variable à valeurs dans $\{0, \dots, N\}$, $N \geq 1$. Montrer que

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^{N-1} \mathbb{P}\{X > k\}.$$

Application. Dans une urne contenant N boules numérotées de 1 à N, on tire avec remise n boules successives. Le numéro de la plus grande boule tirée est modélisé par une variable aléatoire X :

(1) Calculer $\mathbb{P}\{X > k\}$, pour $k \in \{0, \dots, N - 1\}$. En déduire l'espérance de X.

(2) Donner la loi de X.

Exercice 7. Un joueur a $2^N - 1$ euros en poche, $N \geq 1$, et joue sur rouge/noir au casino. (La probabilité de gain est supposée égale à $1/2$.) Au premier coup, il mise un euro sur le noir. Si le noir sort, il empoche, en plus de sa mise, un euro et arrête de jouer. S'il perd, il rejoue en misant deux euros sur le noir. S'il gagne lors cette deuxième mise, il empoche, en plus de ses trois euros de mise, un euro et arrête de jouer. S'il perd, il rejoue en doublant sa mise, i.e. en misant quatre euros sur le noir. Et ainsi de suite...

(1) Expliquer pourquoi le joueur est sûr de pouvoir jouer N fois.

(2) Les issues des N lancers rouge/noir sont modélisés par N variables aléatoires de Bernoulli $X_1, \dots, X_N$. Décrire à partir de $X_1, \dots, X_N$ l'événement : « le joueur perd toute sa fortune au bout des N lancers ». Calculer sa probabilité.

(3) On désigne par S le gain algébrique empoché par le joueur au bout des N lancers. Montrer qu'il vaut 1 ou $-2^N + 1$. Donner la loi de S.

(4) Calculer l'espérance de S. Commenter.

Exercice 8. Une chaîne de frabrication produit des objets qui peuvent être défectueux, selon les hypothèses de modélisation suivantes :

(1) la chaîne produit en une heure un nombre aléatoire Y d'objets, Y à valeurs dans $\{0, \ldots, N\}$, $N \geq 1$,

(2) chaque objet produit a une probabilité $p = 1/10$ d'être défectueux, indépendamment de tous les autres.

Le nombre d'objets défectueux produits en une heure par la chaîne de fabrication est modélisé par une variable aléatoire X.

(1) Pour deux entiers $k, n \geq 0$, calculer la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}\{X = k | Y = n\}$. (Bien distinguer les cas $k \geq n$ et $k > n$.)

(2) Quelle est l'espérance de X sous la probabilité conditionnelle $\mathbb{P}(\cdot | Y = n)$, i.e. l'espérance de la loi conditionnelle de X sachant $Y = n$?

(3) En déduire que $\mathbb{E}(X) = p\mathbb{E}(Y)$.

Exercice 9. Montrer que la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$ est intégrable. Calculer son espérance.

Exercice 10. Montrer que la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est intégrable. Calculer son espérance.

2. Espérance et indépendance. Variance.

Exercice 11. Soit X une variable aléatoire de loi uniforme sur le doublon $\{-N, N\}$, $N \geq 1$. Calculer l'espérance et la variance de X. Commenter.

Exercice 12. Calculer, par deux méthodes différentes, la variance d'une loi binomiale de paramètres n et p.

Exercice 13. Calculer la variance d'une loi uniforme sur $\{1, \ldots, N\}$. On rappelle que

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 14. Etant donnée une variable aléatoire X, on appelle fonction génératrice de X la fonction

$$\forall s \in [0, 1], \quad G_X(s) = \mathbb{E}[s^X].$$

(1) Montrer que $G_X(s)$ est bien définie pour tout $s \in [0, 1]$.

(2) Calculer $G_X(s)$ pour X de loi binomiale de paramètres $n \geq 1$ et $p \in [0, 1]$, puis pour X de loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$.

(3) Montrer que $G_{X+Y}(s) = G_X(s)G_Y(s)$, $s \in [0, 1]$, si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes.

(4) On suppose que X prend un nombre fini de valeurs. Montrer que G_X est dérivable en 1 : que vaut $G'_X(1)$?

Exercice 15. Montrer que la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1]$ est de carré intégrable. Calculer sa variance.

Exercice 16. Montrer que la loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$ est de carré intégrable. Calculer sa variance.

Exercice 17. Un joueur décide d'aller jouer sur rouge/noir à la roulette d'un casino (probabilité 18/37 de gagner en raison du zéro) en s'imposant la règle suivante : une fois arrivé devant la table de jeu, il tirera au hasard uniforme entre 1 et N le nombre de coups qu'il jouera.

Le nombres de coups à jouer est modélisé par une variable aléatoire T et les issues des N lancers rouge/noir auquel le joueur participera éventuellement sont modélisés par N variables $X_1, \dots, X_N$ à valeurs dans $\{0, 1\}$.

(1) Montrer que le gain du joueur s'écrit sous la forme

$$G = \sum_{i=1}^{T} (2X_i - 1).$$

(2) En décomposant T comme une combinaison d'indicatrices, calculer $\mathbb{E}(G)$ et $\mathbb{V}(G)$.

Exercice 18. Démontrer que la variance de la somme de n variables aléatoires indépendantes de carré intégrable est égale à la somme des n variances.

Exercice 19. Soient $X_1, \dots, X_n$ n variables indépendantes de même loi de Bernoulli de paramètre $p \in [0, 1]$. Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \mathbb{E}\Big[\Big|\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - p\Big|^2\Big] = 0.$$

Exercice 20. A la sortie d'un restaurant, le garçon remet, à n hommes venus déjeuner ensemble, leurs chapeaux au hasard.

Les clients sont numérotés de 1 à n : pour le client i, on désigne par X_i la variable aléatoire valant 1 si le chapeau distribué est le bon et 0 sinon. Le nombre de chapeaux correctement distribués est $S = X_1 + \cdots + X_n$.

(1) Donner la loi de chaque X_i. En déduire l'espérance de S.

(2) Donner la valeur de $\mathbb{E}(X_i X_j)$ pour $i \neq j$. En déduire la variance de S.