Université de Nice - L2 - Probabilités

# FEUILLE DE TD NUMÉRO 5

## 1. Loi d'une variable continue

**Exercice 1.** Calculer la fonction de répartition d'une variable aléatoire $X$ de loi uniforme sur $]0,1[$. Quelle est la probabilité que $X$ soit dans l'intervalle $]1/4,3/4[$, dans l'intervalle $[1/2,3]$, dans l'intervalle $]-5,1/3]$ ?

**Exercice 2.** Calculer la fonction de répartition de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

**Exercice 3.** Etant donnée une variable aléatoire $X$ de loi uniforme sur $]0,1[$, donner la loi de la variable $\lambda X + \mu$ pour $\lambda$ et $\mu$ deux réels.

Méthode. On écrira, pour $a < b$,

$$\mathbb{P}\{a \leq \lambda X + \mu \leq b\},$$

comme l'intégrale entre $a$ et $b$ d'une fonction de densité. On utilisera pour cela le changement de variable $y = \lambda x + \mu$.

**Exercice 4.** Etant donnée une variable aléatoire $X$ de loi exponentielle de paramètre 1, donner la loi de $\lambda^{-1}X$, pour $\lambda$ réel strictement positif.

Méthode. On écrira, pour $a < b$,

$$\mathbb{P}\{a \leq \lambda^{-1}X \leq b\},$$

comme l'intégrale entre $a$ et $b$ d'une fonction de densité. On utilisera pour cela le changement de variable $y = \lambda^{-1}x$.

**Exercice 5.** Etant donnée une variable aléatoire $X$ de loi gaussienne centrée réduite, i.e. de loi de densité

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

donner la loi de $m + \sigma X$, pour $m$ réel et $\sigma$ réel strictement positif.

Méthode. On écrira, pour $a < b$,

$$\mathbb{P}\{a \leq m + \sigma X \leq b\},$$

comme l'intégrale entre $a$ et $b$ d'une fonction de densité. On utilisera pour cela le changement de variable $y = m + \sigma x$.

**Exercice 6.** Soit $U$ une variable aléatoire de loi uniforme sur $]-\pi/2, \pi/2[$. Calculer la loi de $\tan(U)$. (Même méthode que dans les exercices précédents.)

## 2. Espérances et de Variances

**Exercice 7.** Calculer l'espérance et la variance de la loi uniforme sur le segment $[a,b]$, $a < b$, i.e. la loi de densité

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{b-a}\mathbf{1}_{[a,b]}(x).$$

**Exercice 8.** Calculer l'espérance et la variance de la loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

**Exercice 9.** Calculer l'espérance et la variance d'une loi gaussienne de paramètres $m$ et $\sigma^2$, $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, i.e. de densité

$$x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right).$$

**Exercice 10.** Soit $X$ une variable aléatoire de loi gaussienne centrée réduite. Calculer $\mathbb{E}[\exp(X)]$.