Université de Nice - M1 IMEA - Méthode de Monte-Carlo

FEUILLE 5

MESURES D'OCCUPATION

Exercice 1. On désigne par f la densité (sur $\mathbb{R}$) :

$$f(x) = \frac{e^{-(x-1)^2/2}}{\sqrt{2\pi}} .$$

Soit $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $g(x) = \frac{1}{1+x^2}$. Soit C la constante inconnue : $C = \int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)dx$. Le but de l'exercice est de simuler suivant la densité $h(x) = \frac{f(x)g(x)}{C}$.

(1) Soit $M(x, dy) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(y - 0,9x)^2/2\right)$ un noyau de Markov sur $\mathbb{R}$. Ceci veut dire simplement : si (X_n) chaîne de Markov de noyau M alors, $\forall n$, la loi de X_{n+1} sachant X_n est de densité $y \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-(y - 0,9X_n)^2/2\right)$. Simuler une chaîne de Markov de transition M.

(2) Trouver une chaîne de Metropolis $(Y_n)_{n\geq 0}$ de noyau de proposition M et de loi invariante h.

(3) Simuler la chaîne trouvée à la question précédente. On admettra que sa mesure d'occupation $(= \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N+1} \delta_{Y_k})$ converge vers h quand $n \to +\infty$.

(4) Dessiner un histogramme de la mesure d'occupation de (Y_n) (pour N assez grand). Comparer à h (pour calculer C, on pourra utiliser l'instruction `integrate` en scilab).

Exercice 2. Soit $(\epsilon_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables i.i.d. de loi $\mathcal{B}(0, 2993)$. Soient

$$A_0 = \begin{bmatrix} 0,4 & -0,3733 \\ 0,06 & 0,6 \end{bmatrix}, \; b_0 = \begin{bmatrix} 0,3533 \\ 0 \end{bmatrix},$$

$$A_1 = \begin{bmatrix} -0,8 & -0,1867 \\ 0,1371 & 0,8 \end{bmatrix}, \; b_1 = \begin{bmatrix} 1,1 \\ 0,1 \end{bmatrix}.$$

On dédinit les applications affines $S_i : x \in \mathbb{R}^2 \mapsto A_i x + b_i$ $(i = 0, 1)$. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ la chaîne de Markov dans $\mathbb{R}^2$ définie par : $X_0 = 0$,

$$\text{pour tout } n \geq 0, X_{n+1} = S_{\epsilon_{n+1}}(X_n) .$$

Faire une simulation et un dessin de la mesure d'occupation de $(X_n)_{n\geq 0}$ (on demande de dessiner des points dans $\mathbb{R}^2$). Pour dessiner des points en scilab : `plot(x(1),x(2),'r.',"MarkerSize",1);`