

FEUILLE 6

MODÈLE D'ISING AVEC CONDITION AU BORD

Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Soit $\Lambda = \{-N, -N+1, \dots, -1, 0, 1, \dots, N\}^2 \subset \mathbb{Z}^2$. Soit E l'ensemble des fonctions $x : \Lambda \rightarrow \{-1, +1\}$ telles que, pour tout $m_1 \in \{-N, -N+1, \dots, N\}$, $x(-N, m_1) = 0$, $x(m_1, -N) = 0$, $x(N, m_1) = 1$ si $m_1 > -N$, $x(m_1, N) = 1$ si $m_1 > -N$. Soit, pour $x \in E$,

$$H(x) = \frac{1}{2} \sum_{\substack{m, m' \in \Lambda \\ |m - m'| = 1}} |x(m) - x(m')|^2.$$

On s'intéresse à

$$\pi(x) = \frac{1}{Z(\beta)} e^{-\beta H(x)},$$

avec $Z(\beta) = \sum_{x \in E} e^{-\beta H(x)}$.

- (1) Trouver un noyau de Markov M de E dans E qui soit irréductible. Rappel : cela veut dire que l'on cherche une manière de se promener dans E en faisant des sauts aléatoires et telle que les sauts permis peuvent nous emmener de n'importe quel point à n'importe quel point ; pour tout $x, y \in E$, $M(x, y)$ est la probabilité de sauter en y quand on se trouve en x .
- (2) Trouver une chaîne de Markov de loi invariante π .
- (3) Écrire un programme qui simule la loi invariante ci-dessus.
- (4) Trouver des valeurs de β tels que le graphique ressemble aux exemples disponibles sur la page internet du cours.