Feuille de TD n°7
Mme Malot
Durée : 1 à 2 semaines

Remarque 1
En raison de la diversité des parcours au sein de la filière, cette feuille et toutes les suivantes seront organisées de la façon suivante :

- *Une première partie sera commune à tous.*
- *Une seconde partie sera spécifique aux étudiants ayant 3h de TD par semaine.*

1 Partie commune

Exercice 1 :
On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur l'intervalle $[0, \theta]$ dont on possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué.

1. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_1$ de θ par la méthode des moments.
2. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\ ;\ \theta)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
3. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_2$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 2 :
On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité est donnée par :

$$\begin{cases} e^{-(x-\theta)}, & \text{si } x \geq \theta; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

On possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué, de même loi que X.

1. Calculer l'espérance de la variable X.
2. En déduire un estimateur $\hat{\theta}_1$ de θ par la méthode des moments.
3. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\ ;\ \theta)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
4. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_2$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 3 :
On considère une variable aléatoire X de loi Binomiale de paramètres m et p, dont on possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué. On cherche à estimer le paramètre p de la loi.

1. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\,; p)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
2. Déterminer un estimateur $\hat{p}$ de p par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 4 :
On considère une variable aléatoire X de loi exponentielle de paramètre λ, dont on possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué. On cherche à estimer le paramètre λ de la loi.

1. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\,; \lambda)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
2. Déterminer deux estimateurs $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ de λ par la méthode des moments.
3. Déterminer un estimateur $\hat{\lambda}$ de λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 5 :
Même question que l'exercice 4, sauf que cette fois-ci, on considère une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\lambda}$.

2 Partie spécifique

Exercice 1 :
On considère une variable aléatoire X de loi uniforme sur l'intervalle $[\theta, \theta + 1]$ dont on possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué.

1. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_1$ de θ par la méthode des moments.
2. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\ ;\ \theta)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
3. Déterminer un estimateur $\hat{\theta}_2$ de θ par la méthode du maximum de vraisemblance.
4. La méthode du maximum de vraisemblance fournit-elle toujours un unique estimateur? Et la méthode des moments?

Exercice 2 :
On considère une variable aléatoire X de loi de Poisson de paramètre λ, dont on possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué.

1. Donner deux estimateurs $\hat{\lambda}_1$ et $\hat{\lambda}_2$ de λ obtenus par la méthode des moments.
2. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\ ;\ \lambda)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
3. Déterminer un estimateur $\hat{\lambda}_3$ de λ par la méthode du maximum de vraisemblance.

Exercice 3 :
On considère une variable aléatoire X de loi Normale de paramètres μ et σ^2, dont on possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué. On cherche à estimer le paramètre μ de la loi, en supposant le paramètre σ^2 connu.

1. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\ ;\ \mu)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
2. Déterminer un estimateur $\hat{\mu}$ de μ par la méthode du maximum de vraisemblance.
3. Y-a-t'il une différence si cette fois, on suppose σ^2 inconnu?

Exercice 4 :
On considère une variable aléatoire X dont la fonction de densité est donnée par :

$$f_\theta(x) = \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+(x-\theta)^2}$$

On possède un échantillon $(X_1,\ X_2,\ \ldots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué, de même loi que X.

1. Déterminer l'expression de la vraisemblance $L(x_1, \ldots,\ x_n\ ;\ \theta)$ associée au n-uplet $(x_1, \ldots,\ x_n)$.
2. Que se passe-t'il en ce qui concerne la méthode du maximum de vraisemblance?