UNIVERSITÉ DE NICE SOPHIA-ANTIPOLIS
Master 1 IMEA - Méthodes de Monte-Carlo
Sylvain Rubenthaler
http ://math.unice.fr/∼rubentha/cours.html

Feuille d'exercices numéro 7

1. Soit E, F des espaces finis (ou dénombrables). Soit Q noyau de transition de E dans E (pour tout $x \in E$, $Q(x,.)$ est une loi de probabilité sur E). Le noyau Q est supposé irréductible. Soit K noyau de transition de E dans F (pour tout $x \in E$, $K(x,.)$ est une loi de probabilité sur F). On suppose que pour tout $(x,y) \in E \times F$, $K(x,y) > 0$. On dispose de $Z : E \times F \to \mathbb{R}^+$ et on note, pour tout $x \in E$, $\sum_{u \in F} Z(x,u)K(x,u) = z(x)$.On s'intéresse à la chaîne de Markov suivante dans $E \times F$.
   - $X_0 = x_0 \in E$ (quelconque), $U_0 \sim K(x_0,.)$.
   - Si on a $(X_n, U_n) \in E \times F$.
     - On tire $X^*_{n+1} \sim Q(X_n,.)$ et $V_{n+1} \sim \mathcal{U}([0;1])$ (indépendant de tout le reste). On tire $U^*_{n+1} \sim K(X^*_{n+1},.)$.
     - On calcule
     $$\alpha(X_n, U_n, X^*_{n+1}, U^*_{n+1}) = \inf\left(1, \frac{Z(X^*_{n+1}, U^*_{n+1})Q(X^*_{n+1}, X_n)}{Z(X_n, U_n)Q(X_n, X^*_{n+1})}\right).$$
     - Si $V_{n+1} \leq \alpha(X_n, U_n, X^*_{n+1}, U^*_{n+1})$ alors $X_{n+1} = X^*_{n+1}$. Sinon $X_{n+1} = X_n$.

   (a) On remarque que pour tout $(x,y) \in E \times F$, $(x',y') \mapsto Q(x,x')K(x',y')$ définit une mesure de probabilité sur $E \times F$ (on a bien $\sum_{x' \in E} \sum_{y' \in F} Q(x,x')K(x',y') = 1$). On notera $\overline{Q}((x,y),.)$ cette mesure. Montrer que $\overline{Q}$ est un noyau de Markov irréductible sur $E \times F$.

   (b) Montrer que $(X_n)_{n \geq 0}$ converge en loi vers une loi proportionnelle à z.

2. Soient p et q des probabilités sur E (espace fini) avec $\forall x, 0 < p(x) \leq cq(x)$ où c constante > 0. On prend des variables Y_n i.i.d. de loi q, indépendantes de X_0. On définit par récurrence une chaîne (X_n) :
   - On tire X_0 suivant q.
   - Quand on a X_n, on tire $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendamment de toutes les autres variables et :
   $$X_{n+1} = \begin{cases} Y_{n+1} & \text{si } U_n \leq \frac{p(Y_{n+1})}{cq(Y_{n+1})} \\ X_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

   (a) Montrer que (X_n) est une chaîne de Markov.

   (b) Calculer la probabilité de transition $P(x,y)$ de (X_n).

   (c) Calculer μP pour une probabilité μ. En déduire que la loi de X_n converge vers une unique probabilité invariante égale à p.

   (d) Quel rapport y-a-t-il entre cette chaîne et une méthode de rejet classique ?

3. On se place sur $E = \mathbb{N}$. Soit q loi sur E telle que $q(x) = q(-x)$. Soit p une loi telle que $p(x) > 0$, $\forall x$. On définit une chaîne de Markov (X_n) par :
   - $X_0 \sim p$
   - On tire $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendante de toutes les autres variables et Z_n de loi q indépendante de toutes les autres variables. On pose $Y_n = X_n + Z_n$ et :
   $$X_{n+1} = \begin{cases} Y_n & \text{si } U_n \leq \inf\left(1, \frac{p(Y_n)}{p(X_n)}\right) \\ X_n & \text{sinon} \end{cases}.$$

(a) Montrer que (X_n) est une chaîne réversible.

(b) Soit $\pi(x) = \frac{1}{Z}\exp(-\beta H(x))$ une loi sur E (où H est une fonction, β une constante quelqconque et Z est la constante de normalisation). Comment approcher $\int_E f(x)\pi(dx)$ à l'aide d'un algorithme de Métropolis ?

4. Couplage.
On suppose que l'on a un noyau de Markov irréductible Q sur un espace E fini (ou dénombrable) et π probabilité sur E telle que $\pi Q = \pi$. On suppose qu'il existe une probabilité λ sur E et $\epsilon > 0$ tels que $\forall x, y \in E$,

$$\epsilon\lambda(y) \leq Q(x,y) \ .$$

On construit deux chaînes de Markov (X_n) et (Y_n) par :
- On tire X_0 suivant π et Y_0 (indépendamment de X_0) suivant π'.
- Si on a tiré $X_0, \dots, X_n$ et $Y_0, \dots, Y_n$, on tire $U_n \sim \mathcal{U}([0,1])$ indépendamment de toutes les autres variables.
  - Si $U_n \leq \epsilon$, on tire $X_{n=1} = Y_{n+1}$ suivant λ.
  - Sinon
    - Si $X_n = Y_n$, on tire $X_{n=1} = Y_{n+1}$ suivant la loi $\frac{1}{1-\epsilon}(Q(X_n,.) - \epsilon\lambda(.))$ (c'est bien une loi de probabilité).
    - Sinon on tire X_{n+1} suivant $Q(X_n,.)$ et Y_{n+1} suivant $Q(Y_n,.)$ (indépendamment).

(a) Montrer que (X_n) et (Y_n) sont des chaînes de Markov de transition Q.

(b) Montrer que pour presque tout ω, $\exists n$ tel que $X_n(\omega) = Y_n(\omega)$.

(c) On rappelle que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(X_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \sum_{x\in E} f(x)\pi(x)$. Montrer que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(Y_n) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{p.s.}} \sum_{x\in E} f(x)\pi(x) \,.$$