Université de Nice Sophia-Antipolis
L2 MI
TD de Statistique

Année Universitaire 2012/2013
Statistique

Feuille de TD n°8

Exercice 1 :
On considère une échantillon $(X_1, \dots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué de loi de Poisson de paramètre λ.

1. Rappeler l'expression de $\hat{\theta}_1$ et de $\hat{\theta}_2$, les estimateurs de θ obtenus par la méthode des moments et du maximum de vraisemblance.
2. Ces deux estimateurs sont-ils sans biais? Sinon, modifier celui qui ne l'est pas pour qu'il le devienne. Sont-ils convergents?

Exercice 2 :
On considère une échantillon $(X_1, \dots,\ X_n)$ indépendant et identiquement distribué de loi de densité de paramètre $a > 0$

$$\begin{cases} \frac{k+1}{a^{k+1}} x^k, & \text{si } x \in [0, a]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

où k est un paramètre connu strictement supérieur à -1.

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Calculer son espérance $\mathbb{E}(X)$. En déduire un estimateur de a. Cet estimateur est-il sans biais?
3. Calculer la vraisemblance du n-uplet $(x_1, \dots,\ x_n)$. En déduire que $\sup\limits_{1\leq i\leq n} X_i$ est l'estimateur du maximum de vraisemblance.
4. Déterminer la fonction de répartition puis la loi de l'estimateur $\sup\limits_{1\leq i\leq n} X_i$. Calculer son espérance et en déduire un estimateur sans biais de a.

Exercice 3 :
Soit X une variable aléatoire de densité :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{\theta^2}, & \text{si } x \in [0, \theta]; \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Déterminer un estimateur de θ, par la méthode des moments, construit à partir d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de X, et étudier ses propriétés.
2. Déterminer un estimateur du maximum de vraisemblance sans biais $\hat{\theta}_n$ de θ, construit à partir d'un échantillon $(X_1, \dots, X_n)$ de X, et étudier ses propriétés.