M1 IM - Séries temporelles

Examen (durée : 3h)

Documents (autres que les feuilles de TD) et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. Barème provisoire : 3-4 points par exercice (un peu plus pour l'exercice 3)..

Exercice 1. Soit $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ une série temporelle. Soient $h \in \mathbb{N}^*$, $\alpha \in]0;1[$. Calculer

$$\widehat{x}_{n,h} = \arg\min_{x \in \mathbb{R}} \sum_{j=0}^{n-1} \alpha^j (x_{n-j} - x)^2 .$$

(On demande de refaire une démonstration du cours.)

Exercice 2. Soit $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ un processus $ARCH(p)$ de coefficients $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p \geq 0$ (ce qui veut dire que $X_t | X_{t-1}, \dots, X_{t-p}$ est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma_t^2)$ avec $\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i X_{t-i}^2$). On admet que les $W_t = X_t^2 - \sigma_t^2$ forment un bruit blanc.

Montrer que $(X_t^2)_{t\in\mathbb{Z}}$ est un processus $AR(p)$. (On demande de faire une démonstration similaire à celle du cours.)

Exercice 3. On considère un processus auto-régressif $(X_n)_{n\geq 0}$ d'ordre 2 de satisfaisant :

$$X_n - \frac{7}{6} X_{n-1} + \frac{1}{3} X_{n-2} = \epsilon_n \tag{0.1}$$

(pour $n \geq 2$, avec des (ϵ_n) indépendants et identiquement distribués, de loi $\mathcal{N}(0,1)$).

(1) Montrer qu'il existe un processus stationnaire[1] satisfaisant la relation (0.1) ci-dessus (on pourra utiliser un théorème du cours). (Rappel : un tel processus est centré.)

(2) Soit σ la fonction d'auto-covariance de $(X_n)_{n\geq 0}$. Calculer $\sigma(0)$, $\sigma(1)$ (écrire les résultats sous forme de fraction rationnelle réduite).

(3) Calculer $\sigma(h)$ pour tout $h \geq 2$.

Exercice 4. Soit une suite $(W_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ de variables aléatoires indépendantes et identiquement distribuées de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Pour tout t, on note $X_t = W_t - \frac{1}{2} W_{t-1}$.

(1) Montrer que la suite $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$ est de moyenne et de variance constante. On admettra dans la suite que cette suite est stationnaire[1].

(2) Calculer la fonction d'auto-covariance de $(X_t)_{t\in\mathbb{Z}}$.

Exercice 5. Soit une série temporelle $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ $(n = 100)$. La figure 0.1 est le graphe de cette série

(1) Écrire la commande `R` permettant de calculer Δx.

(2) On suppose que $\Delta^2 x$ est un processus stationnaire (voir la figure 0.2).Écrire les commandes `R` permettant de tracer les auto-corrélations (empiriques) et les auto-corrélations partielles (empiriques) de $\Delta^2 x$ (elles sont tracées dans la figure)

(3) Le processus $\Delta^2 x$ ressemble-t-il plus à un $AR(p)$ ou un $MA(q)$? Pour quel p ou q ? On admet par la suite que $\Delta^2 x$ est un AR ou un MA.

(4) À quelle classe appartient le processus x ?

(5) Donner la commande `R` qui permet d'estimer les paramètres de $\Delta^2 x$.

1. au sens des deux définitions du cours

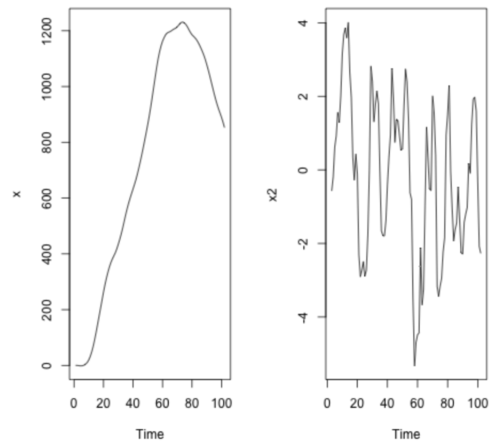

FIGURE 0.1. Graphe de x (à gauche) et $\Delta^2 x$ (à droite).

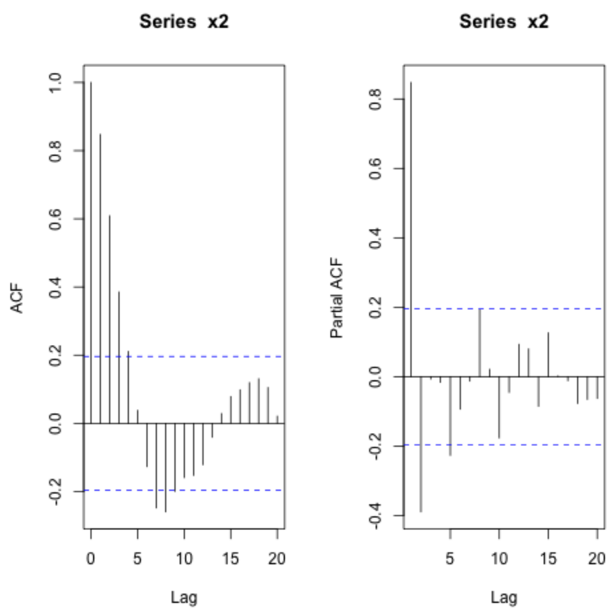

FIGURE 0.2. Auto-corrélation et auto-corrélation partielle.