M1 IM - Méthodes de Monte-Carlo
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Corrigé de l'examen

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Aucune importance n'a été accordée aux erreurs de syntaxe en R. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Nous calculons la fonction de répartition de g : $G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)dt$. Nous avons $G(x) = 0$ si $x \leq e$, et pour $x > e$:

$$\begin{aligned} G(x) &= \int_e^x \frac{1}{t(\log(t))^2} dt \\ &= \left[-\frac{1}{\log(t)} \right]_e^x \\ &= 1 - \frac{1}{\log(x)} . \end{aligned}$$

Calculons maintenant le pseudo-inverse de G (qui ici est un inverse). Si $u \in [0;1[$, on résoud

$$\begin{aligned} 1 - \frac{1}{\log(t)} &= u \\ 1 - u &= \frac{1}{\log(t)} \\ t &= \exp\left(\frac{1}{1-u}\right) . \end{aligned}$$

Donc $G^{-1}(u) = \exp(1/(1-u))$. D'après le cours, nous savons que le code suivant renvoie une variable de loi de densité g.

Algorithme 1 Inversion de la fonction de répartition.

```
tirer U ~ U([0;1])
X=exp(1/(1-U))
renvoyer X
```

(2) Pour tout $x > e$, $f(x) \leq \frac{1}{Z} \times \frac{1}{e \times x(\log x)^2}$. Nous prenons donc $C = 1/e$.

(3) La proposition sur la méthode de rejet nous dit que l'algorithme suivant simule une variable de densité f.

Algorithme 2 Méthode de rejet

```
b=0
tant que (b=0) répéter
    tirer U ~ U([0;1])
    tirer X de loi de densité g (par exemple avec la méthode de la question
précédente)
    si (U × Cg(X) ≤ 1/(x log(x))^2) alors
        b=1
renvoyer X
```

Exercice 2. .

(1) Nous avons $M(x,y) \neq 0$ si et seulement si $x_i = y_i$ pour au moins $n-1$ indices i. Supposons $x, y \in E$ avec $x_i = y_i$ pour tout $i \neq j$, $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ fixé. Nous avons alors :

$$M(x,y) = \frac{\mathbb{P}(X = (x_1, \ldots, x_{j-1}, y_j, x_{j+1}, \ldots, x_n))}{\mathbb{P}(X_1 = x_1, \ldots, X_{j-1} = x_{j-1}, X_{j+1} = x_{j+1}, \ldots, X_n = x_n)} = \frac{(1/N)^n}{(1/N)^{n-1}} = \frac{1}{N}\,.$$

(2) Puisque $M(x,y) \neq 0$ est équivalent à $M(y,x) \neq 0$ et que dans ce cas, $M(x,y) = M(y,x)$, nous avons donc que M est symétrique.

(3) Nous remarquons que si $x \in A$ et $y \in E^n$, $\frac{\pi(y)}{\pi(x)} = \frac{p(y)\mathbb{1}_A(y)}{p(x)}$. Donc l'algorithme de Metropolis se simpifie en l'algorithme suivant.

Algorithme 3 Metropolis

```
x=(1,2...,10)
pour i de 1 à 50, répéter
    tirer j uniformément dans {1,2,...,n}
    tirer y_j uniformément dans E
    si y_j ∉ {x_1,...,x_{j-1},x_{j+1},...,x_n} alors
        x<-(x_1,...,x_{j-1},y_j,x_{j+1},...,x_n)
```

(4) Il suffit de montrer que pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}$ et tout $x = (x_1, \ldots, x_n)$ et $z = (x_1, \ldots, x_{i-1}, u, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ dans A, $Q(x,z) > 0$. Nous avons

$$Q(x,z) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{N} > 0\,.$$

(5) Nous déduisons de la question précédente que, pour tout x de A, $Q(x,x) = \frac{1}{nN} > 0$. Donc Q est apériodique.

(6) D'après un résultat du cours, puisque Q est irréductible et apériodique, $(Z_k)_{k \geq 0}$ converge en loi vers π.