M1 IM - Méthodes de Monte-Carlo

`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

Examen (durée : 1h30)

Documents et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Aucune importance ne sera accordée aux erreurs de syntaxe en R. Les exercices sont indépendants.

Exercice 1.

(1) Soit la densité de probabilité

$$g(x) = \mathbb{1}_{x>e} \times \frac{1}{x(\log x)^2}\,.$$

Écrire un code qui simule une variable aléatoire de densité g (on pourra écrire le code en R ou en pseudo-code). Justifier.

(2) Soit la densité de probabilité

$$f(x) = \mathbb{1}_{x>e} \times \frac{1}{(x\log(x))^2} \times \frac{1}{Z}\,,$$

avec $Z = \int_e^{+\infty} \frac{1}{(x\log(x))^2}dx$. Trouver une constante C telle que $f(x) \leq \frac{C}{Z}g(x)$ pour tout $x > e$.

(3) Écrire une code qui simule une variable aléatoire de densité f (on pourra écrire le code en R ou en pseudo-code). Justifier.

Exercice 2. Soit $N = 100$ et $n = 10$. Soit $E = \{1, 2, \dots, N\}$. Soit p la loi de probabilité uniforme sur E^n. Soit $X = (X_1, \dots, X_n)$ une variable de loi p. Nous remarquons que les composantes de X sont indépendantes et uniformes sur E.

Soit A le sous-ensemble de E^n formé des n-uplets $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tels que x_i soient deux à deux distincts. Soit π la loi uniforme sur A. Pour tout x dans E^n, nous avons $\pi(x) = \frac{p(x)\mathbb{1}_{x\in A}}{p(A)}$.

(1) On s'intéresse à une transition M sur E^n décrite de manière algorithmique comme suit. Si on se trouve en $x = (x_1, \dots, x_n)$,
   - on tire i uniformément dans $\{1, 2, \dots, n\}$,
   - puis on tire Y_i avec la loi $\mathbb{P}(Y_i = y_i) = \mathbb{P}(X_i = y_i | X_j = x_j \text{ pour } j \neq i)$,
   - on saute en $(x_1, \dots, x_{i-1}, Y_i, x_{i+1}, \dots, x_n)$.

   Soient x et y dans E^n, écrire une formule pour $M(x, y)$.

(2) Montrer que M est symétrique.

(3) Écrire un code simulant les 50 premiers pas d'un algorithme de Metropolis basé sur la transition M et de loi invariante π. On prendra soin de prendre un point de départ dans A et on remarquera que la chaîne de Metropolis est à valeurs dans A.
   Nous noterons Q le noyau de la chaîne de Metropolis (que nous appellerons $(Z_k)_{k\geq 0}$). La chaîne $(Z_k)_{k\geq 0}$ se promène dans A.

(4) Montrer que Q est irréductible sur A.

(5) Montrer que Q est apériodique.

(6) Montrer que $(Z_k)_{k\geq 0}$ converge en loi vers π.