

M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)

Nom :

Prénom :

Contrôle no 1, sujet A (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance sera accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On ne tiendra pas compte dans la correction des erreurs de syntaxe en R.

PRÉLIMINAIRES

Rendre la feuille avec la copie.

Si vous bénéficiez d'un tiers-temps, ne traitez que l'exercice 2 et rendez votre devoir au bout d'une heure trente.

Exercice 1. On s'intéresse à

$$I = \int_0^{+\infty} \sqrt{x} e^{-x} dx.$$

- (1) Donner deux méthodes de Monte-Carlo différentes pour calculer I (de manière approchée).
- (2) Écrire dans le cadre ci-dessous un programme en R qui calcule I (de manière approchée).

Exercice 2. On s'intéresse à la fonction codée dans l'algorithme 1

Algorithme 1 Simulation d'une variable aléatoire.

```
simu1<-function(t)
{
  b=0
  while (b==0)
  {
    u=runif(1,0,2)
    v=runif(1,0,1)
    if (v*(1/2)*(4/pi)<(2/pi)*sqrt(2*u-u^2))
    {
      b=1
    }
  }
  return(u)
}
```

(1) Soient

$$f : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0;2]}(x) \frac{2}{\pi} \sqrt{2x - x^2},$$

$$g : x \in \mathbb{R} \mapsto \mathbb{1}_{[0;2]}(x) \frac{1}{2}.$$

Montrer que f et g sont des densités de probabilité (on pourra remarquer que $2x - x^2 = 1 - (1 - x)^2$).

(2) Montrer que pour tout $x \in [0; 2]$,

$$f(x) \leq \frac{4}{\pi} g(x).$$

(3) Quelle est la loi de la variable aléatoire renvoyée par l'appel de `simu1(1)` ?