M1 IM - Méthodes de simulation stochastique (Monte-Carlo)
Nom :
Prénom :

Corrigé du contrôle no 1, sujet B (durée 1h30)

Documents, téléphones et calculatrices interdits. La plus grande importance a été accordée lors de la correction à la justification des réponses. Les exercices sont indépendants. On n'a pas tenu compte dans la correction des erreurs de syntaxe en R.

Exercice 1.

(1) Nous remarquons que $I = \mathbb{E}(\sin(\sqrt{U}))$ avec $U \sim \mathcal{U}([0;1])$. Donc, si $U_1, U_2, \dots$ sont i.i.d. de même loi que U alors

$$\frac{\sin(\sqrt{U_1}) + \dots + \sin(\sqrt{U_n})}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{p.s.}} I\,.$$

Ce qui nous fournit une méthode de Monte-Carlo.

(2) Voir l'algorithme 1.

Algorithme 1 Calcul de I.

```
n=1000
s=0
for (i in 1:n)
{
 u=runif(1,0,1)
 s=s+sin(sqrt(u))
}
s=s/n
print(s)
```

(3) On veut

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\sin(\sqrt{U_1}) + \dots + \sin(\sqrt{U_n})}{n} - I\right| \le 0,01\right) \ge 0,9\,,$$

ce qui est équivalent à

$$\mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left|\frac{\sin(\sqrt{U_1}) + \dots + \sin(\sqrt{U_n})}{n} - I\right| > 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) < 0,1\,.$$

Par le théorème central-limite, c'est presque la même chose que

$$\mathbb{P}\left(|Z| > 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) < 0,1\,,$$

avec $Z \sim \mathcal{N}(0;1)$. Nous avons (en utilisant les symétries de la gaussienne)

$$\mathbb{P}\left(|Z| > 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) = 2\left(1 - \mathbb{P}\left(Z \le 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right)\right)\,.$$

Nous voulons donc

$$\mathbb{P}\left(Z \le 0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\right) \ge 1 - \frac{0,1}{2} = 0,95\,.$$

D'après la table, il suffit donc de prendre n tel que $0,99 \times \frac{\sqrt{n}}{\sigma} \ge 1,65$, donc $n = \left\lceil \left(\frac{1,65}{0,99}\right)^2 \times \sigma^2 \right\rceil$ ($\lceil \dots \rceil$ est la partie entière supérieure) répond à la question.

Exercice 2.

(1) Nous étudions la fonction $h : x \geq 0 \mapsto \exp(-x^3 + \lambda x)$. Nous avons $h'(x) = (-3x^2 + \lambda)h(x)$. Nous en déduisons donc le tableau de variation 1. Nous prenons donc

$$C(\lambda) = \frac{\exp\left(\lambda^{3/2}\left(-\frac{1}{3^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)}{Z\lambda} .$$

(2) Le nombre moyen de boucles est $C(\lambda)$.

(3) Nous étudions la fonction $C(\lambda)$. Notons $\alpha = \left(-\frac{1}{3^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ (nous remarquons que $\alpha > 0$). Nous avons

$$C'(\lambda) = \frac{1}{Z}\left(-\frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda}\alpha\frac{3}{2}\lambda^{1/2}\right)\exp\left(\alpha\lambda^{3/2}\right) .$$

D'où le tableau de variation 2. Le paramètre λ minimisant le temps de calcul est $\left(\frac{3}{2\alpha}\right)^{2/3}$.

x	0		$\sqrt{\lambda/3}$		$+\infty$
$h'(x)$		$+$	0	-	
$h(x)$		$\nearrow$	$\exp\left(\lambda^{3/2}\left(-\frac{1}{3^{3/2}} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)\right)$	$\searrow$	

Table 1. Tableau de variation de h.

λ	0		$\left(\frac{3}{2\alpha}\right)^{2/3}$		$+\infty$
$C'(\lambda)$		$-$	0	$+$	
$C(\lambda)$		$\searrow$	$C\left(\left(\frac{3}{2\alpha}\right)^{2/3}\right)$	$\nearrow$	

Table 2. Tableau de variation de h.