Université de Nice - M1 IM - Méthode de Monte-Carlo
`http://math.unice.fr/~rubentha/cours.html`

FEUILLE 2

SIMULATION PAR LA MÉTHODE DU REJET

Exercice 1. Montrer que l'algorithme suivant permet de simuler une réalisation de loi uniforme sur le disque unité de $\mathbb{R}^2$.

(1) Simuler (U, V) couple de deux v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
(2) Tant que $U^2 + V^2 > 1$, répéter (1).
(3) Renvoyer la valeur de (U, V) en fin de boucle.

Coder l'algorithme en `R`.

Exercice 2. Montrer que l'algorithme suivant permet de simuler un couple de v.a.i.i.d. de loi gaussiennes centrées réduites.

(1) Simuler (U, V) couple de deux v.a. i.i.d. de loi uniforme sur $[-1, 1]$.
(2) Tant que $U^2 + V^2 > 1$, répéter (1).
(3) Renvoyer la valeur de (U, V) et de $R^2 = U^2 + V^2$ en fin de boucle.
(4) Poser $Z = [-2\ln(R^2)/R^2]^{1/2}$.
(5) Poser $X = ZU$ et $Y = ZV$.

Coder l'algorithme en `R`. Vérifier à l'aide d'un histogramme que la première variable simulée suit bien une loi gaussienne centrée réduite.

Exercice 3. Soient X et Y deux v.a. i.i.d. de loi exponentielle de paramètre 1.

(1) Montrer que la loi conditionnelle de X sachant $2Y > (1 - X)^2$ a pour densité
$$x \mapsto \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathbf{1}_{[0,+\infty[}(x).$$
(2) Soit S une v.a. de loi Bernoulli de paramètre $1/2$, indépendante du couple (X, Y). Montrer que la loi conditionnelle de $(2S - 1)X$ sachant $2Y > (1 - X)^2$ suit une loi normale centrée réduite.
(3) En déduire un algorithme de simulation de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$. Le coder en `R`.

Exercice 4. Soient f et g ($\mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$) des densités. Soit h la fonction :
$$h(x) = \frac{\sup(f(x), g(x))}{\int_{\mathbb{R}} \sup(f(t), g(t))dt}.$$

(1) On simule une v.a. Z suivant une méthode d' acceptation/rejet. On tire X, Y indépendantes respectivement de lois de densité f, g et U, V indépendantes uniformes sur $[0, 1]$ (et indépendantes de X, Y) jusqu'à ce que
   - $Uf(X) \le g(X)$, auquel cas on prend $Z = Y$
   - ou $Vg(Y) \le f(Y)$ et $Uf(X) > g(X)$, auquel cas on prend $Z = X$.

   Montrer que Z est de loi de densité h.
(2) On suppose ici que f densité de la loi $\mathcal{N}(0, 1)$ et g densité de la loi $\mathcal{N}(3/2, 1)$.
   (a) Écrire un programme qui simule des variables aléatoires suivant h.

(b) Écrire un programme qui dessine un histogramme empirique de h.

Exercice 5. On désigne par f la densité

$$f(x) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) \mathbb{1}_{\{x>0\}} \, , \; x \in \mathbb{R}.$$

(1) Pour $\lambda > 0$ fixé, trouver une constante $c_\lambda > 1$ telle que

$$f(x) \leq c_\lambda \lambda \exp(-\lambda x) \, , \; x \in \mathbb{R}_+ \, .$$

(2) En déduire une méthode de simulation de la loi de densité f

(3) Trouver λ tel que le temps moyen de calcul dans la méthode proposée soit le plus petit possible.

Exercice 6. Pour $a > 0$ donné, on désigne par f la fonction

$$f(x) = \mathbb{1}_{[0;a]}(x) \exp(-x) \, , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

(1) Trouver une constante C telle que Cf soit une densité.

(2) Trouver une constante $c_1 > 1$ telle que

$$Cf(x) \leq c_1 \mathbb{1}_{[0;a]}(x) \, , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

(3) Trouver une constante $c_2 > 1$ telle que

$$Cf(x) \leq c_2 \mathbb{1}_{[0;+\infty[}(x) \exp(-x) \, , \; x \in \mathbb{R} \, .$$

(4) On veut mettre en place une méthode de rejet pour simuler la loi densité f en utilisant la loi uniforme sur $[0; a]$ ou la loi exponentielle. Laquelle vaut-il mieux choisir ? Coder la méthode.

Exercice 7. On souhaite simuler suivant la loi de densité

$$f \, : \, x \in \mathbb{R} \mapsto \frac{1}{Z} \exp(-x^2) \mathbb{1}_{x \geq 1} \, ,$$

avec $Z = \int_1^{+\infty} e^{-x^2} dx$.

(1) Trouver une densité g (suivant laquelle on sait simuler) et une constante C telles que $f \leq Cg$.

(2) Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1/2)$. Montrer que f est la densité de la loi de X sachant $X \geq 1$ (on pourra calculer l'espérance sur une fonction test).

(3) Coder la simulation de la loi de densité f (suivant la méthode du rejet basée sur g, C).